

COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2024  
 Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese,  
 Tomas Ferreira Chase y Pedro Cataldi  
 Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 5: Radiación cósmica de fondo

**Recombinación, desacople y superficie de último scattering**

1. **Recombinación en equilibrio.** Esencialmente el fenómeno de recombinación refiere al proceso de formación de hidrógeno neutro en el universo.

(a) Demostrar, suponiendo que el proceso de recombinación ocurre en equilibrio termodinámico y que los átomos de H neutro se forman en su estado fundamental, que la fracción de protones que permanecen sin combinar  $X$  satisface la ecuación de Saha:

$$\frac{1 - X}{X^2} \approx 3.84 \eta \left( \frac{k_B T}{c^2 m_e} \right)^{3/2} \exp \left( \frac{B}{k_B T} \right), \quad (1)$$

donde  $B = 13.6$  eV es la energía de ionización del H neutro y  $\eta = 2.68 \times 10^{-8} \Omega_b h^2$  es el cociente entre el número de bariones y fotones.

(b) Grafique numéricamente la fracción de ionización  $X$  en función de la temperatura o redshift. Para  $\Omega_b h^2 = 0.1$  y  $0.01$ , estime la temperatura y redshift de recombinación definidos como aquellos en los cuales  $X$  toma un valor arbitrario, e.g.  $0.5$  o  $0.1$ . Compare con la energía de ligadura del hidrógeno y explique por qué es mayor o menor.

(c) Finalmente, estudie este proceso más precisamente a través de la ecuación de Boltzmann que rige la interacción  $e^- + p^+ \rightleftharpoons H + \gamma$

$$a^{-3} \frac{d(n_e a^3)}{dt} = n_e^{\text{EQ}} n_p^{\text{EQ}} \langle \sigma v \rangle \left[ \frac{n_H}{n_H^{\text{EQ}}} - \frac{n_e^2}{n_e^{\text{EQ}} n_p^{\text{EQ}}} \right], \quad (2)$$

con  $\langle \sigma v \rangle$  el promedio de la sección eficaz y la velocidad de las partículas incidentes.

La expresión (2) puede escribirse como

$$\frac{dX}{dt} = \langle \sigma v \rangle \left( \frac{m_e T}{2\pi} \right)^{3/2} e^{-B/T} (1 - X) - n_b \langle \sigma v \rangle X^2, \quad (3)$$

con  $n_b$  la densidad numérica de bariones,

$$\langle \sigma v \rangle \simeq 9.78 \frac{\alpha^2}{m_e^2} \sqrt{\frac{B}{T}} \ln \frac{B}{T} \quad (4)$$

y  $\alpha \simeq 1/137$  la constante de estructura fina.

Defina la variable  $x = B/T$  y reescriba la ecuación (3) en función de  $x$  y del parámetro de Hubble general que describe nuestro universo ( $H(x)$ ). Integre numéricamente la ecuación que obtuvo.

Grafique la solución obtenida junto con la solución de equilibrio proveniente de la ecuación (1) y discuta brevemente las diferencias. Determine cuál es el valor *final* de la fracción de electrones libres.

**Ayuda.** Es una ecuación muy similar a la que resolvió en el ejercicio 5 de la guía 5 de nucleosíntesis primordial.

2. Dado que los fotones tienen un espectro de cuerpo negro, uno puede estimar la cantidad relativa de fotones con energías  $hf$  mayores a  $E_0$ , en el límite en que  $E_0 \gg k_B T$ , como

$$\frac{n(hf > E_0)}{n_\gamma} \simeq 0.42 \left( \frac{E_0}{k_B T} \right)^2 e^{-E_0/k_B T}. \quad (5)$$

- (a) Muestre la relación (5).
- (b) Asumiendo que el cociente entre bariones y fotones  $\eta = 6.1 \times 10^{-10}$ , ¿a qué temperatura habrá un fotón por barión que ionice al hidrógeno neutro, esto es, un fotón con energía  $hf > Q = 13.6$  eV?
- (c) La temperatura calculada en 2a, ¿es mayor o menor que  $T_{rec} = 3760$  K? Interprete el resultado en términos de la validez de las aproximaciones que asumió para obtener la ecuación de Saha.
3. Las observaciones cosmológicas indican que el universo es espacialmente plano, que su ritmo actual de expansión es  $H_0 = 70$  km/s/Mpc y que actualmente está compuesto en un 70% de energía oscura (constante cosmológica) y en un 30% de materia no relativista, de la cual una sexta parte es materia ordinaria. Teniendo esto en cuenta compruebe que la recombinación del hidrógeno se produce durante la era de dominio de la materia. Calcule también la edad del universo en el instante de recombinación.

4. **Desacople entre electrones y fotones.** La recombinación del hidrógeno y el desacople de fotones no son el mismo proceso, sin embargo están fuertemente relacionados. Cuando el universo está completamente ionizado (supongamos por concreitud una temperatura de  $3 \times 10^5$  K), la interacción principal de los fotones corresponde al scattering de Thomson con electrones. Dada la sección eficaz de este proceso  $\sigma_T = 6.65 \times 10^{-25}$  cm<sup>2</sup>

- (a) Calcule el redshift y la temperatura de desacople entre fotones y electrones a partir del criterio de Gamow ignorando la evolución de la fracción de electrones libres  $X$ , es decir asumiendo que  $X = 1$ . ¿Es plausible que el universo se mantenga completamente ionizado hasta la temperatura que encontró en este inciso?
- (b) Calcule nuevamente la temperatura y el redshift de desacople pero ahora considere la evolución en equilibrio de  $X$  obtenida en los incisos 1a–1b. Estime de la manera más simple posible cuál es el valor de  $X$  luego del desacople y compare con el valor *final* obtenido en 1c.

5. **Superficie de último scattering.** En épocas actuales, y si consideramos el universo en su totalidad, la radiación interactúa muy poco con la materia no relativista. Una forma de verlo es calcular el camino libre medio (CLM) de los fotones. Este depende de la densidad del medio intergaláctico, y de su estado de ionización.

- (a) Un valor aproximado para este CLM puede estimarse suponiendo que toda la materia bariónica del universo está distribuida uniformemente y que se halla completamente ionizada. Sabiendo que la interacción de radiación y materia se rige por la difusión Thomson (sección eficaz  $\sigma_T$ ), calcule el valor para el CLM de un fotón. Diga además si este valor corresponde a un valor mínimo del verdadero CLM y justifique. Compare el valor obtenido con el tamaño del universo observable hoy. ¿Qué concluye, estadísticamente, sobre la probabilidad de que un fotón interactúe con la materia?

- (b) Calcular el camino libre medio de los fotones antes y después de la recombinación, suponiendo que después de la recombinación queda una ionización residual fraccional  $X \simeq 2 \times 10^{-4} \sqrt{\Omega_m h^2 / 0.14}$  ( $0.022 / \Omega_b h^2$ ), con  $\Omega_m$  y  $\Omega_b$  los parámetros de densidad actuales de la materia total y de los bariones respectivamente. Compare el camino libre medio calculado con el tamaño del horizonte.
- (c) Asuma el modelo de recombinación instantánea y obtenga la expresión analítica para la profundidad óptica

$$\tau(t_0, t_e) = \int_{t_e}^{t_0} n_e(t) \sigma_T c dt. \quad (6)$$

Ahora tome una evolución de la fracción de ionización  $X$  un poco más realista y grafique la profundidad óptica en función del redshift  $z_e$ . Considere los siguientes dos casos: A) evolución de  $X$  en equilibrio hasta  $T = T_{\text{dec}}$  y para  $T < T_{\text{dec}}$  determine  $X$  por continuidad o como la fracción residual y B) tome directamente la solución numérica  $X(T)$  que se obtiene en el inciso 1c.

- (d) ¿Cuál es la interpretación de  $\tau$ ?, ¿cuál es la interpretación del tiempo  $t_*$  (o temperatura o redshift) para el cual  $\tau(t_*) = 1$ ? Calcúlelo para las distintas aproximaciones del inciso anterior y compare con los tiempos de recombinación y desacople?
- (e) ¿Conoce algún efecto/proceso cosmológico en el universo tardío que pueda cambiar cambiar la fracción de ionización para tiempos muy posteriores a recombinación? ¿cuál es y cómo afectaría el gráfico de  $X$ ?