

COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2024
 Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese,
 Tomas Ferreira Chase y Pedro Cataldi
 Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 7: Ecuaciones y perturbaciones cosmológicas

Ecuaciones de Boltzmann, perturbaciones y aproximación de fluido

1. Definiendo

$$\Theta_S(\mu, k, \eta) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d\mu' \int_0^{2\pi} d\phi' S_{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}'} \Theta(\mu', k, \eta) \quad (1)$$

con

$$S_{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}'} = 1 + \frac{3(\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}')^2 - 1}{4}, \quad (2)$$

demostrar que

$$\Theta_S(\mu, k, \eta) = \frac{1}{4} \int_{-1}^1 d\mu' [2 + \mathcal{P}_2(\mu)\mathcal{P}_2(\mu')] \Theta(\mu', k, \eta) = \quad (3)$$

$$= \Theta_0(k, \eta) - \frac{\mathcal{P}_2(\mu)}{2} \Theta_2(k, \eta), \quad (4)$$

donde $\mathcal{P}_2(\mu) = \frac{1}{2}(3\mu^2 - 1)$ es el polinomio de Legendre de orden 2 y $\Theta_l(k, \eta)$ es el coeficiente de orden l de la expansión en polinomios de Legendre de la perturbación $\Theta(\mu, k, \eta)$.

2. Considere una métrica de FLRW perturbada de la forma

$$ds^2 = -(1 + 2\Psi) dt^2 + a^2(t) \delta_{ij} (1 + 2\Phi) dx^i dx^j \quad (5)$$

- (a) Hallar las componentes δT^0_i y la traza δT^i_i del tensor de energía-impulso para cada especie (fotones, neutrinos, bariones y CDM) en términos de los momentos de la función de distribución perturbada correspondiente.
- (b) Muestre que las perturbaciones lineales del tensor de energía-impulso de un fluido no perfecto

$$T^\mu_\nu = u^\mu u_\nu (P + \rho) + P \delta^\mu_\nu + \Sigma^\mu_\nu \quad (6)$$

con $u^\mu u_\mu = -1$, $u_\mu \Sigma^\mu_\nu = u^\nu \Sigma^\mu_\mu = 0$, $\bar{\Sigma}^\mu_\nu = 0$, pueden escribirse como

$$\delta T^0_0 = -\delta\rho \quad (7)$$

$$\delta T^0_i = (\bar{P} + \bar{\rho}) \delta u_i \quad (8)$$

$$\delta T^i_j = -\delta P \delta^i_j + \Sigma^i_j \quad (9)$$

$$\delta T^i_0 = -(\bar{P} + \bar{\rho}) \frac{\delta u_i}{a^2} \quad (10)$$

$$\text{con } u_\mu = (-1 - \Psi, \delta u_i). \quad (11)$$

- (c) Comparando las componentes δT^0_i obtenidas en 2a-2b y definiendo $\delta u_i = \delta u_{,i}$, identificar las variables δu del fluido correspondientes a cada especie, i.e. δu_γ , δu_b , δu_{cdm} , δu_ν , en términos de la función de distribución.

Transformaciones de gauge y teorema de descomposición

3. Muestre que ante una transformación de gauge, $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ con $\xi^i = \xi_S^{,i} + \xi_V^i$, las distintas componentes de la métrica

$$g_{00} = -1 - 2A \quad (12)$$

$$g_{0i} = a [-B_{,i} - B_i] \quad (13)$$

$$\text{con } (B_i^{,i} = 0)$$

$$g_{ij} = a^2 [\delta_{ij}(1 + 2D) - 2E_{,ij} + V_{i,j} + V_{j,i} + h_{ij}^{TT}] \quad (14)$$

$$\text{con } (V_i^{,i} = 0, h_{ij}^{TT,i} = h_{ij}^{TT,j} = h^{TT}_i{}^i = 0),$$

transforman como:

$$\Delta A = -a^{-1} \xi^{0'} \quad (15)$$

$$\Delta B = -a^{-1} \xi^0 + \xi_S' \quad (16)$$

$$\Delta D = -H \xi^0 \quad (17)$$

$$\Delta B_i = \xi_V' \quad (18)$$

$$\Delta V_i = -\xi_{V_i} \quad (19)$$

$$\Delta h_{ij}^{TT} = 0. \quad (20)$$

Recuerde que según la notación y las convenciones que utilizamos los índices espaciales se suben y bajan con la delta de Kronecker δ_{ij} , tal que $\xi_{V_i} = \xi_V^i$ y $\xi_S^{,i} = \xi_{S,i} = \partial \xi_S / \partial x^i$.

4. (a) Use el resultado del problema anterior para mostrar que los potenciales de Bardeen:

$$\Phi_A \equiv A + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \eta} [a(E' - B)] \quad (21)$$

$$\Phi_H \equiv -D + aH(B - E') \quad (22)$$

son invariantes de gauge.

- (b) Use que

$$\Delta(\delta\rho) = -\dot{\bar{\rho}} \xi^0 \quad (23)$$

$$\Delta(\delta P) = -\dot{\bar{P}} \xi^0 \quad (24)$$

$$\Delta(\delta u) = \xi^0 \quad (25)$$

y muestre que las variables

$$\zeta = D - H \delta \bar{\rho} / \dot{\bar{\rho}} \quad (26)$$

$$R = D + H \delta u \quad (27)$$

son invariantes de gauge.