COSMOLOGÍA - 2do cuatrimestre 2024

Docentes: Diana López Nacir, Nahuel Mirón Granese, Tomas Ferreira Chase y Pedro Cataldi

Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 9: Perturbaciones en la materia y formación de estructuras

1. Para caracterizar las fluctuaciones en la materia se estudia la evolución del espectro de potencias $P(k,\eta)$ desde las condiciones iniciales dada por inflación a través del espectro de potencias primordial $P_p(k)$. Para comenzar su estudio usaremos el código público CLASS[1] que resuelve las ecuaciones de Boltzmann para todas las perturbaciones acopladas. Si bien el cuerpo principal de ecuaciones corresponde a perturbaciones lineales, existen opciones para activar ciertos modelos de evolución no lineal.

   (a) Elija parámetros cosmológicos fiduciales tanto los relativos a la evolución como a las condiciones iniciales vinculadas a los espectros primordiales dados por inflación. Grafique el espectro de potencias lineal $P(k,\eta)$ en función de k en unidades h/Mpc para distintos redshifts (o tiempos) $z=0$, $z=2$ y $z=10$. ¿Cómo es la evolución del espectro en función del tiempo?, ¿a qué se debe la dependencia en k, en particular que indica el máximo?, ¿y las oscilaciones?

   (b) Sabemos que la teoría lineal no puede ser válida cuando las fluctuaciones relativas en la densidad son mayores a la unidad, es decir cuando $\delta \gg 1$. Para estimar la escala $k_{\rm nl}$ en la cual la aproximación lineal deja de funcionar se define la condición $\Delta^2(k_{\rm nl}) \sim 1$ sobre el espectro adimensional $\Delta^2(k)$ donde $P(k)$ es el espectro de potencias lineal. Estime el valor de la escala $k_{\rm nl}$ en unidades de h/Mpc a partir del espectro lineal en $z=0$ y determine el rango en el que los efectos no lineales son importantes.

   (c) Obtenga los espectros lineal y no lineal. Tome algún criterio cuantitativo y estime directamente con estos datos cuál es el rango en el que difieren ambos espectros.

   (d) Repita 1b y 1c para $z=2$. ¿Esta escala k_{nl} crece o decrece con el tiempo? Explique por qué.

   (e) Grafique los espectros lineales y no lineales para $z=0$ y $z=2$ superpuestos mostrando la transición de un régimen al otro.

2. Ahora analicemos las perturbaciones en la materia con un poco más de detalle. La evolución lineal del espectro de potencias de la materia oscura $P(k,\eta)$ luego del desacople entre bariones y fotones está dado por

$$P(k,\eta) = [D_+(\eta)]^2 \, [T(k)]^2 \, P_p(k), \tag{1}$$

   donde $D_+(\eta)$ es el factor de crecimiento lineal con $D_+(\eta_0)=1$, $T(k)$ es la función de transferencia y $P_p(k)$ es el espectro de potencias primordial, $P_p(k) \sim (k/\mathcal{H})^4 \, P_\Phi(k)$ donde $P_\Phi(k) \sim k^{n_s-4}$ es el espectro del potencial gravitatorio. La normalización de las amplitudes de los espectros está fijada por las observaciones. El valor $n_s=1$ corresponde al espectro de Harrison-Zeldovich invariante de escala.

[1] Para más información `http://class-code.net/`. También existe otro código público de uso extendido denominado CAMB, detalles en `https://camb.info/`.

(a) Factor de crecimiento. Si pensamos en un universo con materia y constante cosmológica (o energía oscura, pero sin fluctuaciones), el factor de crecimiento $D_+(\eta)$ es la solución creciente de la ecuación

$$\frac{d^2 D}{d\eta} + \mathcal{H}\,\frac{dD}{d\eta} = \frac{3}{2}\,\Omega_m\,\mathcal{H}^2 D, \tag{2}$$

donde $\mathcal{H}(\eta)$ es la constante de Hubble conforme $\mathcal{H} = (\mathrm{d}a/\mathrm{d}\eta)/a = Ha)$, η es el tiempo conforme y $\Omega_m(\eta)$ es la densidad de fondo de materia total en unidades de la densidad crítica.

i. Mostrar que la solución decreciente es $D_-(a) \propto \mathcal{H}(a)/a = H(a)$ y la creciente es

$$D_+(a) = C\,\frac{\mathcal{H}(a)}{a}\int_0^a \frac{da'}{\mathcal{H}^3(a')}, \tag{3}$$

con C una constante.

ii. Hallar C tal que $D_+(a) = a$ cuando $a \to 0$ para un universo plano con cantidades arbitrarias de materia y energía oscura. Fijar además $a(\text{hoy}) = a_0 = 1$. Utilizando la normalización calculada integrar numéricamente la ecuación (3) para hallar el factor de crecimiento D_+ como función de a para un universo plano en los casos ($\Omega_{\mathrm{m0}} = 1, \Omega_\Lambda = 0$), ($\Omega_{\mathrm{m0}} = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$) y ($\Omega_{\mathrm{m0}} = 0.5, \Omega_\Lambda = 0.5$). ¿Qué diferencias y qué similitudes encuentra entre las soluciones? ¿Qué puede concluir acerca del crecimiento de las estructuras en nuestro universo ($\Omega_{\mathrm{m0}} = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$) respecto de un dominio puro de materia? ¿Estas conclusiones dependen de la normalización elegida?

Ayuda. Para hacer el desarrollo de $D_+(a)$ cuando $a \to 0$ es conveniente utilizar algún programa con lenguaje simbólico, e.g. la librería Sympy para Python, Mathematica o Sage. Por otro lado para responder las preguntas sobre el crecimiento de las estrucutras en distintos universo, es posible definir una cantidad f que mida la tasa de crecimiento relativo de las fluctuaciones. Utilice esta función $f = \mathrm{d}\ln D/\mathrm{d}\ln a$ para comparar entre los distintos universos.

(b) Función de transferencia.

i. Derive (o recuerde de ejercicios anteriores) el redshift z_{eq} para el cual el universo pasa del dominio de la radiación al de la materia. Calcule el número de onda comóvil $k_{\mathrm{eq}} \simeq \mathcal{H}(z_{\mathrm{eq}})$ como función de Ω_m y Ω_γ.

ii. Utilizando CLASS y asumiendo los parámetros cosmológicos de Planck 2018 obtenga, a orden lineal, el espectro de potencias de la materia y la función de transferencia para $z = 0$.

iii. ¿Cuál es la relación entre el espectro de potencias y la función de transferencia?

iv. Estudie las asíntotas del espectro de potencias para $k \to 0$ y $k \to \infty$. ¿Es compatible con la estimación teóricas?, ¿por qué?

v. Para los parámetros dados calcule k_{eq} en unidades de h/Mpc. ¿Podría estimar este valor a partir del espectro de materia que calculó con CLASS? En caso afirmativo explique cómo.

3. Evolución del bias. A partir de las observaciones de la materia luminosa (galaxias) pretendemos estimar propiedades de la materia oscura. Para ello debemos vincular la densidad de galaxias con la de materia oscura a través de algún modelo. A esa relación la llamamos bias. El modelo más simple se lo denomina bias lineal local, estudiemos alguna propiedad de esta relación.

Asuma que las galaxias se forma en un tiempo dado, $t = t_*$, con una densidad δ_g que satisface la relación del bias lineal local $\delta_g = b_0\delta_{\rm cdm}$ en ese tiempo inicial. Si el número de estos objetos se conserva[2] y su velocidad es igual a la de la materia oscura muestre que a orden lineal el factor de bias $b = \delta_g/\delta_{\rm cdm}$ evoluciona a la unidad y que además sigue siendo local.

Ayuda. Utilice la ecuación de continuidad en variables comóviles tanto para las galaxias como para la materia oscura.

4. Una vez definido el espectro de potencias es útil considerar las amplitudes de las fluctuaciones de sobredensidad δ y de masa relativa $\delta M/\bar{M}$ integradas sobre una escala de referencia R definidas como

$$\delta_R(\vec{x}) = \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)_R = \frac{1}{V}\int d^3\vec{x}'\,\delta(\vec{x}')W_R(\vec{x}-\vec{x}'), \tag{4}$$

donde V es el volumen y $W_R(x)$ es una función ventana que vale 1 para $|x| < R$ y cero en otro caso. En consecuencia es usual considerar el valor RMS de las cantidades mencionadas para describir la amplitud de las fluctuaciones en la materia de modo que

$$\sigma_R^2 = \left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)_R^2 \right\rangle = \langle \delta_R^2 \rangle \tag{5}$$

La convención standard es elegir $R = 8\,h^{-1}$ Mpc, lo cual define un parámetro cosmológico llamado σ_8.

   (a) Muestre que
   $$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\,k^2 P(k) W^2(kR) \tag{6}$$
   donde $W(x) = (3/x^3)(\sin x - x\cos x)$.

   (b) En consecuencia utilice el espectro obtenido con CLASS y calcule σ_8.

   (c) Disminuya el contenido de materia oscura en un 20%, vuelva a correr CLASS y calcule σ_8 y Ω_{m0}. Explique por qué σ_8 aumenta o disminuye.

5. El modelo más simple de evolución no lineal es el modelo del colapso esférico. Bajo este modelo, en un universo con $\Omega_m = 1$ el radio físico de una estructura simétricamente esférica r sigue la ecuación de movimiento

$$\ddot{r} = -\frac{G\,M(< r)}{r^2} \tag{7}$$

donde $M(< r)$ es la masa interior al radio r. Asumir que la masa está distribuida en capas esféricas que no se cruzan, y por lo tanto, que M es una constante de movimiento. Si fuera necesario, asumir también que la sobredensidad inicial $\delta_i \ll 1$ y, en consecuencia, que la *velocidad peculiar inicial* es despreciable.

   (a) Demostrar que esta ecuación admite una solución paramétrica
   $$r = A(1-\cos\theta), \qquad t = B(\theta - \sin\theta), \qquad A^3 = GMB^2 \tag{8}$$

[2] Esta es una hipótesis muy fuerte debido a la posible colisión y/o acreción de estos objetos.

(b) A partir de la definición de la densidad interior al radio r, calcular la fluctuación de densidad δ y demostrar que

$$\delta = \frac{9}{2}\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1-\cos\theta)^3} - 1 \tag{9}$$

(c) Tomando el límite de tiempos pequeños, identificar la fluctuación de densidad inicial y demostrar que las fluctuaciones lineales evolucionan siguiendo

$$\delta_{\rm lin} = \frac{3}{5}\left[\frac{3}{4}(\theta - \sin\theta)\right]^{2/3} \tag{10}$$

(d) Calcule las densidades $\delta_{\rm lin}$ y δ para los tiempos de máximo tamaño y de colapso de la estructura. A partir del valor $\delta_{\rm lin}|_{\rm col} = \delta_c$ se define el umbral δ_c tal que cualquier estructura con $\delta > \delta_c$ colapsa.

(e) Durante la parte final del proceso de colapso la simetría esférica y las aproximaciones asumidas suelen no ser válidas, las fluctuaciones locales de densidad y del potencial gravitatorio (entre otras) hacen que las partículas se desvíen de sus trayectorias perfectamente radiales debido a la interacción con estas fluctuaciones y se virializan a través de un proceso de relajación violenta luego del cual la estructura alcanza el equilibrio virial. En efecto, utilizando el teorema del virial indique cuál es el radio estable de la estructura virializada y en qué tiempo lo alcanza (puede hacerlo en función de θ). Calcule el valor de la sobredensidad δ para ese caso y compare con los valores de la teoría lineal. Sabiendo que los clusters hoy tienen sobredensidades del orden de 200, ¿tiene sentido aplicar la aproximación lineal para describir su dinámica?. En caso afirmativo argumente por qué y en caso negativo discuta si existen otras estructuras que sí podría describir la teoría lineal.