Teoría Cuántica de Campos

Guía 3: Cuantización canónica del campo de Klein Gordon
Primer Cuatrimestre 2018

En esta guia vamos a explorar la relación general entre campos cuantizados y particulas en el caso simple del campo de Klein-Gordon, que tiene asociado un espacio de Fock para partículas que obedecen la estadistica de Bose.

1. * Considere la cuantización canonica de un campo de Klein-Gordon real de masa m.

   (a) Usando la expresión $\hat{\phi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int a_{\vec{k}} e^{-ikx} + a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{+ikx} \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$, verifique que este operador local (dependiente del punto del espacio tiempo) cumple la ecuación de Klein Gordon y que el campo es real (es absolutamente trivial, pero es bueno hacer ambas cuentas una vez al menos. Recuerde que el cuadrivector k en las exponenciales tienen como componente temporal a $k_0 = k^0 = \omega_k \equiv \sqrt{\vec{k}^2 + m^2}$)

   (b) Utilizando las relaciones de conmutación entre los operadores de creación y destrucción $[a_{\vec{k}}, a_{\vec{k}'}^{\dagger}] = \delta_{\vec{k}-\vec{k}'}$ (todas las demas iguales a cero) verifique las reglas de conmutación canonicas entre el campo y su momento canonico conjugado $\hat{\Pi}$ a tiempos iguales (Clasicamente, $\Pi = \frac{\partial L}{\partial(\partial_0 \phi)}$). Observe la relevancia de los factores 2π y la presencia de ω_k en la medida de integración en esta verificación.

2. Los operadores de creación y destrucción actuan en un espacio de Hilbert (un espacio de Fock), que contiene un estado aniquilado por los de destrucción (el estado de vacio). Las transformaciones de Poincare $x \to \Lambda x + a$ forman un grupo de simetías de la teoría cuántica y por tanto cada transformación de este grupo tiene un operador unitario asociado que actuan en ese espacio de Hilbert. Como es usual en el picture de Heisenberg, estos operadores actuan en los campos de operadores de la siguiente forma: $\hat{\phi}(x) \to U(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U^{\dagger}(\Lambda, a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$

   (a) Escriba la expresión de los operadores $U(1, a)$ asociados a una traslación espacio-tiempo de parametro a^{μ} en términos de los operadores de creación y destrucción.

   (b) Como construiría los operadores unitarios asociados a boost y rotaciones? No se espera que halle su expresión sino que indique la manera de encontrarlos.

   (c) Verifique que $U(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U^{\dagger}(\Lambda, a) = \hat{\phi}(\Lambda x + a)$ para el caso de una traslación pura y a primer orden en el parámetro a.

   (d) Usando que el vacio es aniquilado por el operador de destrucción, argumento porque espera que el vacio sea invariante de Poincare en base a la forma general que espera que tengan los operadores unitarios $U(\Lambda, a)$

3. **Interpretación de partícula**. A partir del estado de minima energía (denominado *vacio* por su interpretación como estado desprovisto de particulas y denotado por $|0>$) puede construirse todo el espacio de Hilbert mediante la acción de los operadores de campo, o en forma mas simple, a partir de los operadores de creación. A fin de ver esta relación:

   (a) Muestre que un estado de la forma $\prod_{i=1}^{n} a_{k_i}^{\dagger}|0>$ es autoestado del hamiltoniano y el operador momento con autovalores iguales a $\sum_{i=1}^{n} \omega(k_i)$ y $\sum_{i=1}^{n} k_i$ respectivamente.

   (b) Verifique que el estado anterior es autoestado del operador *numero* definido como $N = \int a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} d^3k$ con autovalor n.

4. Un estado de la forma $a_{\vec{k}}^{\dagger}|0>$ puede considerarse como el estado de una partícula de cuadrimomento definido $(\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$. Este tipo de estado no esta en el espacio de Hilbert como puede verse al calcular formalmente su norma. Esto es analogo a lo que ocurre en mecanica cuántica no relativista (ausencia de estados con momento definido; estos estan fuera del Hilbert). Sin embargo, *suavizando* la expresión anterior con una función de los momentos espaciales que decaiga suficientemente rapido para momentos grandes, puede obtenerse un estado del Hilbert.

   (a) Considere ahora dos funciones de R^3: f_1 y f_2 consideradas funciónes de los momentos espaciales. Halle el producto interno entre los estados: $\int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega(k)}} f_1(k) a_k^{\dagger}|0>$ y $\int \frac{d^3k}{\sqrt{\omega(k)}} f_2(k) a_k^{\dagger}|0>$. Exprese el resultado como una integral que involucre a f_1 y f_2. (el factor $1/\sqrt{\omega_k}$ podría absorberse en la definción de f pero se escribio asi por razones que quedaran claro en el item siguiente)

(b) Muestre que este producto es invariante de Lorentz. Es decir, que la integral anterior no se altera si se usa en vez de f una función compuesta con una transformación de Lorentz. (ayuda: escriba la integral en los momentos espaciales como una integral en el cuadrimomento pesado con una δ que imponga la condición de $cascarademasa$: $k^2 = m^2$. Existe una demostración diferente mas transparente que veremos en clase.)

Observación: pensado como una teoría de partículas, el producto interno en el Hilbert de n partículas (espacio de Fock) es análogo al de la mecanica cuantica no relativista, pero modificando la medida de integración d^3k por $\frac{d^3k}{\sqrt{m^2+\vec{k}^2}}$.

5. El ejercicio anterior permite entender porque en el enfoque riguroso el campo se trata como una funcional o distribución, siendo su argumento no un punto del espacio tiempo sino una función de este último. La vinculación entre nuestro enfoque y el riguroso es a través de:

$$\hat{\phi}(f) = \int d^4x \hat{\phi}(x) f(x)$$

siendo f una función arbitaria del espacio tiempo (con alguna propiedad de decaimiento en infinito). Para el caso de campos libres puede utilizarse una función del espacio solamene de forma de mantener la dependencia del campo respecto al tiempo:

$$\hat{\phi}(t,h) = \int d^3x \hat{\phi}(\vec{x},t) h(x)$$

Muestre que con esta ultim defininción $\hat{\phi}(t,h)|0>$ es un estado del Hilbert como el del ejercicio 4.

6. Muestre que para todo estado $\mid \xi_n\rangle$ correspondiente a n-particulas, el valor de expectación de $\langle \xi_n \mid \hat{\phi}(x) \mid \xi_n\rangle$ es igual a cero. Como construiría entonces un estado $|\xi\rangle$ tal que el valor de expectación de $\langle \xi \mid \hat{\Phi}(x) \mid \xi\rangle$ sea igual a una función del espacio-tiempo no-nula de modo que tenga chances de describir un estado semiclasico? (ayuda: recuerde la construcción de estado análogos en el caso del oscilador armonico unidimensional)

7.  * El valor de expectación del campo en el vacio es igual a cero. Sin embargo, el hecho de que el vacio es un estado no trivial se manifiesta en el valor expectación en vacio no nulo de productos de campos, evaluados en n puntos del espacio tiempo diferentes $< 0|\hat{\phi}(x_1)...\hat{\phi}(x_n)|0>$. A estos valores de expectación se las denomina *funciones de n-puntos*, siendo funciones de los n-puntos del espacio tiempo $x_1, ...x_n$. Estas funciones de n-puntos (para n par) se pueden descomponer en productos de funciones de dos puntos.

   (a) Calcule formalmente la expresión de $< 0 \mid \hat{\phi}(x,0)\hat{\phi}(y,0) \mid 0 >$ dejandola expresada como una integral en una sola variable y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas. Observe que el resultado no distinto de cero y apreciable para distancias menores que m (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$)

   (b) Halle analogamente la expresión de la *función de dos puntos* $< 0 \mid \hat{\phi}(x,t_1)\hat{\phi}(x,t_2) \mid 0 >$ (es decir, la función a puntos espaciales iguales y tiempos distintos).

8. Verifique la invariancia de Poincare de la función de dos puntos para dos puntos x e y arbitrarios.

   (a) Observando la expresión resultante como integral en los momentos espaciales y usando la invariancia de la medida de integración.

   (b) Usando la forma en que transforman los operadores de campo: $\hat{\phi}(\Lambda x + a) = U^\dagger(\Lambda, a)\hat{\phi}(x)U(\Lambda, a)$ y la invariancia del vacio ante una transformación de Poincare.

   (c) Concluya entonces que la función de dos puntos solo depende del valor de la distancia Minkowskiana $(x-y)^2$ (y además del signo de $t_2 - t_1$ en el caso en que estan temporalmente separados), mostrando comportamientos cualitativamente diferentes según la distancia sea espacial o temporal

9. **interpretación de particula**. Considere el estado $\Psi_{\mathbf{x}}$ que resulta de aplicar el operador de campo $\hat{\phi}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$ al vacio. Este estado $\Psi_{\mathbf{x}}$ lo mas cercano en la teoría cuantica relativita a la noción de una particula localizada en un punto del espacio tiempo x en el instante $t = 0$.

(a) Relacionando la expresión del producto interno $(\Psi_{\mathbf{x}}, \Psi_{\mathbf{y}})$ con las funciones de dos puntos anteriores muestre que el resultado es apreciablemente distinto de cero para distancias del orden de $1/m$ (al restaurar unidades, esta es longitud de Compton $\frac{\hbar}{mc}$). Este resultado ejemplifica la dificultad de definir la noción de localización en una teoría relativista.

10. **Condición de microcausalidad** Considere un campo de Klein Gordon neutro. Muestre que el conmutador $[\hat{\phi}(x), \hat{\phi}(y)]$ es un numero complejo (es decir, un multiplo del operador identidad) y por tanto es igual a su valor de expectación en vacio (o cualquier estado). A partir de esta observación y los resultados anteriores, muestre que el conmutador es cero para x e y espacialemente separados, es decir para $(x-y)^2 < 0$. Diga porque no puede decir lo mismo cuando estan temporalmente separados (observación: note que para el caso del campo escalar complejo, los conmutadores entre $\hat{\phi}$ y $\hat{\phi}^\dagger$ seran identicamente cero).

11. **Idea de demostración del teorema spin-estadistica**. Considere el campo escalar neutro y suponga ahora que los operadores de creación y aniquilación satisfacen reglas de anti-conmutación. Muestre que el anticonmutador es diferente de cero para puntos espacialemente separados. (Sugerencia: considere los puntos x e y a tiempos iguales, escriba esta como un integral en los momentos y muestre que no es posible que la integral sea cero trabajando la expresión a fin de relacionarla con funciones de Bessel modificadas). Piense porque esta condición de conmutación implica que los estados en el espacio de Fock seran simetricos ante permutación de particulas.

12. Reconsidere los ejercicios 1 y 7, asi como la expresion del operaador hamiltoniano y momento del campo para el caso del campo escalar complejo. Note que ahora algunas funciones de 2-puntos seran nulas. (si no hace el ejercicio, no va a entender la observación)

13. Para el caso del campo escalar complejo, hay una cantidad conservada asociada a la invariancia ente multiplicar el campo por una fase. Halle la expresión de esta a nivel cuantico y muestre que este operador cuenta el numero de particulas creadas por $a^\dagger$ menos el numero de partículas creadas por $b^\dagger$.

14. **Propagador del oscilador armonico cuántico**

    El propagador es una cantidad relevante para la expresión de la matriz de Scatering cuando se introduzcan interacciones. Considere la cuantización canónica de un oscilador armonico unidimensional X de frecuencia ω (y masa $m = 1$ por simplicidad).

    (a) Calcule la función de dos variables $< 0|\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2)|0 >$ siendo $\hat{X}$ el operador posición en la representación de Heisenberg, t_1 y t_2 dos instantes arbitrarios y $|0 >$ el estado de vacio.

    (b) Muestre que la función $i < 0|T(\hat{X}(t_1)\hat{X}(t_2))|0 >$ (donde $T(...)$ significa que los operadores dentro del parentesis deben estar ordenados temporalmente) es una función de Green del operador diferencial $\partial_t^2 + \omega^2$.

15.  * **Propagador del campo escalar neutro o complejo**

    (a) Exprese

    $$\Delta(x-y) \equiv -i\langle 0|T(\hat{\phi}(x)\hat{\phi}^\dagger(y))|0\rangle$$

    como una suma de dos funciones de dos puntos pesadas pesada adecuadamente (en el caso del campo neutro, la expresión final es la misma).

    (b) Exprese el resultado como la transformada de Fourier de

    $$\frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (\epsilon \to 0)$$

    Muestre esto mediante integrales en el plano complejo, en caminos que esquiven los polos dados por ϵ, ubicados en distintos lugares segun sea ϵ positivo o negativo.

    (c) Muestre que se cumple $(\Box_x + m^2)D(x-y) = -\delta^4(x-y)$.