Teoría Cuántica de Campos

Primer Cuatrimestre 2018

Guía 4A: Cuantización canónica de campo de Dirac

Los campos de Dirac, Proca y Maxwell corresponden a reprentaciones no triviales del grupo de Lorentz, en el sentido que el grupo de Lorentz actua no solo modificando el argumento de los campos sino también mezclando las componentes del mismo. En la versión cuantica, los estados de partículas asociadas transforman en forma no trivial ante rotaciones. En el caso masivo, este grado de libertad se manifiesta en lo que llamamos espín. Consideraremos en esta guia el caso de un campo de Dirac masivo.

1. * Considere el campo de Dirac $\psi(x) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int\sum_{r=1,2}(e^{-ikx}u_{\mathbf{p}}^{(r)}b_{\mathbf{p}}^{(r)} + e^{ikx}v_{\mathbf{p}}^{(r)}d_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger})\sqrt{\frac{m}{\omega(p)}}d^3\mathbf{p}$, con b y d cumpliendo las reglas de anticonmutación $\{b_{\mathbf{p}}^{(r)}, (b_{\mathbf{p}'}^{(s)})^\dagger\} = \{d_{\mathbf{p}}^{(r)}, (d_{\mathbf{p}'}^{(s)})^\dagger\} = \delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')\delta_{\mathbf{rs}}$ (u y v son los spinores usuales correspondientes a soluciones de frecuencia positiva y negativa respectivamente, k el cuadrimomento de una particula de masa m con momento espacial $\mathbf{p}$) (todos los restantes anticonmutadores son cero). Verifique que el campo obedece la ecuación de Dirac. Verifique además las relaciones de Heisenberg entre el campo y su momento canonico conjugado a tiempos iguales. Observe que ψ es una 4-upla de operadores.

2. * Exprese los siguientes operadores (cargas conservadas asociadas a invariancia ante traslaciones espacio temporales) en términos de operadores de creación y destrucción:

   (a) Energia

   (b) Momento

3. Halle la expresión de la energía pero ahora usando reglas de conmutación entre los b y d (como las del campo escalar complejo) y muestre que no es definida positiva. (este fue uno de los primeros indicios que encontró Pauli del teorema Spin-Estadistica)

4. * Halle la cantidad conservada asociada a la simetría $U(1)$ global: $\psi \to e^{i\alpha}\psi$). Muestre que los autovalores de esta carga son opuestos para los estados de 1-partícula creados por $b^\dagger$ y $d^\dagger$.

5. Escriba la expresión clásica de la carga conservada asociada a la simetría de rotación e identifique la parte que genera la rotación intrinseca del espinor. Halle la versión cuantica de esta y verifique que un estado de la forma $b_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}|0>$ o $d_{\mathbf{p}}^{(r)\dagger}|0>$ transforma como espera de un objeto de spin $\frac{1}{2}$ ante rotaciones.

6. Una transformación de Poincare dada por (Λ, a) tiene asociado un operador unitario que actua en el campo de Dirac de la siguiente forma:

$$U^\dagger(\Lambda, a)\psi_i(x)U(\Lambda, a) = S_{ij}(\Lambda^{-1})\psi_j(\Lambda x + a)$$

   siendo S la matriz que aparece en la transformación de un espinor de Dirac. Muestre a partir de esto que las funciones de dos puntos resultan invariante ante traslaciones espacio-temporales pero no necesariamente ante transformaciones de Lorentz.

7. Mostrar que:

$$\{\psi_\alpha(x), \bar{\psi}_\beta(y)\} = (i\gamma^\mu\partial^\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta(x-y)$$

   siendo $\Delta(x-y)$ el conmutador analogo en el caso del campo de Klein-Gordon. Muestre que este se anula para puntos x, y espacialmente separados.

8. * Considere la función de 2-puntos ordenada temporalmente $S_{\alpha\beta}(x-y) \equiv -iT\langle 0 \mid \psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \mid 0\rangle$

   (a) Muestre que $S_{\alpha\beta}(x-y) = (i\gamma^\mu\partial_\mu + m)_{\alpha\beta}\Delta_F(x-y)$, siendo $\Delta_F(x-y)$ el propagador de Feynman del campo de Klein Gordon.

(b) Halle la expresión integral en el espacio de momentos del propagador.

9. Usando el teorema de Wick, exprese la función de 4 puntos $\langle 0 \mid \psi_\alpha(x_1)\bar{\psi}_\beta(x_2)\psi_\gamma(x_3)\bar{\psi}_\delta(x_4) \mid 0\rangle$ en terminos de la de 2 puntos

Relaciones varias útiles para combinaciones cuadraticas de espinores de Dirac

$$\sum_{i=1}^{2} u_p{}^{(r)}\overline{u}_p{}^{(r)} = \frac{\not{p}+m}{2m} \qquad \sum_{i=1}^{2} v_p{}^{(r)}\overline{v}_p{}^{(r)} = \frac{\not{p}-m}{2m}$$

$$\overline{u}_p^{(r)}u_p^{(s)} = \delta_{rs} \qquad \overline{v}_p^{(r)}v_p^{(s)} = -\delta_{rs}$$

$$u^{\dagger}{}_p^{(r)}u_p^{(s)} = \frac{2k_0}{m}\delta_{rs} \qquad v^{\dagger}{}_p^{(r)}v_p^{(s)} = \frac{2k_0}{m}\delta_{rs}$$

$$u^{\dagger}{}_p^{(r)}v_{(-p)}^{(s)} = 0$$