Teoría Cuántica de Campos

Primer Cuatrimestre 2018

Guía 4B: Cuantización canónica de campos de espin y helicidad 1

Los campos de Proca y Maxwell corresponden a representaciones de spin y helicidad (respectivamente) 1. Ambos tienen en común la dificultad de que los 4 campos que aparecen en el lagrangiano (componentes de un campo cuadrivectorial) no son todos independientes (por razones diferentes) lo que dificulta implementar el procedimiento de cuantización canonica. En esta guía pondremos el acento en cómo aislar los grados de libertad de cada campo y ver la relación entre estos grados de libertad y el spin/helicidad de la especie de partícula que describen.

1. Considere el lagrangiano de Proca $L = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}Z_\mu Z^\mu$, para un campo Z_μ que es una cuadrivector (real), siendo F la expresión usual: $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu$

   (a) Muestre que las ecuaciones de movimiento que se desprenden de este Lagrangiano equivalen a estas dos ecuaciones:

   $$i)\Box Z^\mu + m^2 Z^\mu = 0 \quad ii)\partial_\nu Z^\nu = 0$$

   Observe que el signo del término de masa en el Lgrangiano es opuesto al del lagrangiano de Klein-Gordon y pese a ello contribuye de la misma forma en la ecuación i).

   (b) Verifique que $\epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})e^{-ikx}+$ complejo conjugado (para $\lambda = 1, 2, 3$) es solución de las ecuaciones, satisfaciendo k la condición $k^2 = m^2$ y siendo los 3 cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ los cuadivectores transversales a k del apendice

2. Verifique que el momento canonico conjugado a Z^0 es identicamente cero y que Z^0, usando la ecuación ii), puede escribirse en funcón de los momentos canonicos asociados a Z^i (observación: esto es relevante para la cuantización canonica, dado que campos y sus momentos conjugados sin ningún vinculo)

   Observación: Los 3 grados de libertad que hay en los coeficientes $a^{(\lambda)}$ pegan con el hecho de que el campo tiene spin 1. Verificar que el campo tiene efectivamente spin $1/2$ requiere mucho mas que este mero conteo de grados de libertad.

3. La expresión del campo de Proca cuantizado es:

   $$Z_\mu = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \sum_{i=1}^{3}(a_k^\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})e^{-ikx} + (a_k^\lambda)^\dagger \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})e^{+ikx})\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$$

   con $[a_k^{(\lambda)}, a_{k'}^{(\lambda')}] = \delta(k-k')\delta_{\lambda\lambda'}$ y todas las demas cero.

   Halle la expresion de las función de dos puntos $< 0 \mid Z^\mu(x)Z^\nu(y) \mid 0 >$ en términos de la de un campo escalar real.

4. Considere ahora el Lagrangiano de Maxwell, que se obtienen usando el Lagrangiano de Proca con $m = 0$. Ahora la condición ii) no sigue de las ecuaciones de movimiento. En su lugar, aparece ahora invariancia de gauge, que permite imponer, entre otras cosas, $\partial_\mu A^\mu = 0$, subsistiendo aun cierta libertad. El procedimiento de Gupta-Bleuler para cuantizar el sistema consiste en considerar primero el espacio de soluciones de un campo que cumpla:

   $$I) \quad \Box A_\mu = 0$$

   y luego imponer la condición

   $$II) \quad \partial_\mu A^\mu = 0$$

5. Muestre que el campo

   $$\hat{A}_\mu = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3}\int \sum_{i=0}^{3}(a_k^\lambda \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})e^{-ikx} + (a_k^\lambda)^\dagger \epsilon_\mu^{(\lambda)}(\vec{k})e^{+ikx})\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega_k}}$$

   satisface las ecuaciones de movimiento I), pero no las ecuaciones II), con los cuadrivectores ϵ del apendice asociados a un vector k nulo

6. Considerando la expresion anterior como un campo clasico (con las $a^{\lambda}(k)$ funciones complejas de k, que relación debería haber entre $a^{(0)}$ y $a^{(3)}$ para que sea solucion de II?

7. La cuantización de I) posee el problema de que los operadores a y $a^{\dagger}$ no actuan en un Hilbert, que supone un espacio con uan forma bilineal definida postiva. Muestre que de las relaciones de conmutación (que siguen de las reglas de conmutación canonicas):

$$[a^{(\lambda)}{}_{k}, a^{(\lambda')}{}^{\dagger}{}_{k'}] = -\eta_{\lambda\lambda'}\delta(k-k')$$

se desprende que estados de norma negativa (asumiendo que los a^{0} destruyen el vació).

8. El problema del item anterior se resuelve parcialmente imponiendo la condición II) a ciertos estados (condición de estado fisico), lo cual deja aun estado con norma 0. Estos últimos representan estados que son puro gauge y que por tanto es correcto que correspondan a estados equivalentes al cero. La versión precisa de esta condición de Gupta-Bleuler es:

$$\partial_{\mu}\hat{A}^{\mu}_{-} \mid \Psi\rangle = 0$$

siendo $\hat{A}^{\mu}_{-}$ la parte de aniquilación de A^{μ}.

   (a) verifique la condición de Gupta-Bleuler se cumple para para estados $\mid \Psi\rangle$ que provengan de actuar en el vacío con la combinación $a^{(3)}{}^{\dagger} - a^{(0)}{}^{\dagger}$, los cuales contienen pares de modos longitudinal ($\lambda = 3$) y temporal ($\lambda = 0$).

   (b) Muestre que el valor de espectación de $\hat{A}$ en $\mid \Psi\rangle$ y $\mid \Psi'\rangle \equiv (1 + \int c(k)(a_k^{(3)}{}^{\dagger} - a_k^{(1)}{}^{\dagger}))d^3k \mid \Psi\rangle$ (con $c(k)$ una función de los momentos) difieren en el gradiente de una función .

   Observación: este último item ilustra que $\int c(k)(a_k^{(3)}{}^{\dagger} - a_k^{(1)}{}^{\dagger}))d^3k \mid \Psi\rangle$ corresponde a una estado *puro gauge*, que en efecto es un estado de norma cero. El espacio de Hilbert (con producto interno definido positivo) se obtiene cuando se declaran equivalentes a estados que difieren en un estado nulo

9. * Halle la función de dos puntos y el propagador del campo de Maxwell en el gauge de Lorentz (Note que la cuenta es muy similar a la del campo escalar complejo).

10. El operador helicidad (proyección del momento angular intrinseco en la dirección de movimiento) $\hat{h}$, en el caso del campo de Proca, puede verse que es:

$$\hat{h} = i\int d^3k(a^{2}{}^{\dagger}_{k}a^{1}{}_{k} - a^{1}{}^{\dagger}_{k}a^{2}{}_{k})$$

   (a) Muestre que los estados $(a_k^{(3)})^{\dagger} \mid 0 >$ y $(a_k^{(2)})^{\dagger} \pm i(a_k^{(1)})^{\dagger} \mid 0 >$ son autoestados de $\hat{h}$. Halle los autovalores y verifique que encajan con el hecho de que el campo describe una particula de spin 1.

   (b) Argumente porque en el caso del caso de Maxwell, donde se obtiene la misma expresión para los estados transversales, la helicidad se reduce a 1 y -1.

Apendice: Base de cuadrivectores de polarizacion

11. Dado un cuadrivector de tipo tiempo, k^{μ} ($k^2 = m^2$, con k^0 positivo), es posible hallar una terna de cuadrivectores $\epsilon^{(\lambda)}$ ($\lambda = 1, 2, 3$), ortogonales entre si, de tipo espacio y ortogonales a k^{μ}. Se puede completar una base ortonormal eligiendo $\frac{k^{\mu}}{m}$ como el cuarto cuadrivector. Muestre que se verifica la relación de completitud:

$$\sum_{i=1}^{3}\epsilon^{\lambda}_{\mu}\epsilon^{\lambda}_{\nu} = -\eta_{\mu\nu} + \frac{1}{m^2}k_{\mu}k_{\nu}$$

12. A fin de tratar el caso del campo de Maxwell, considere ahora un cuadrivector k nulo. La base ortonormal solo puede contener a los sumo 2 cuadrivectores ortogonales a k (que son de tipo espacial). La base se puede completar con dos vectores adicionales $\epsilon^{(3)}$ espacial y $\epsilon^{(4)}$ temporal, tal que $(\epsilon^{(3)} + \epsilon^{(4)})$ sea proporcional a k. Considere la elección en que $\epsilon^{(0)} = n$ (n vector tipo tiempo unitario), $\epsilon^{(3)} = \frac{k-(k.n)n}{k.n}$ y los $\epsilon^{(1)}$ y $\epsilon^{(2)}$ ortogonales a estos y de de tipo espacio. Muestre que es posible satisfacer esas condiciones. (para ello puede fijar un sistema de coordenadas en que n este en el eje temporal)