Teoría Cuántica de Campos. *Primer Cuatrimestre 2018*

Guía 5A: Interacciones y calculo perturbativo de amplitudes de scattering

Al agregar a los lagrangianos considerados anterioremente términos de orden superior al cuadratico (términos de interacción), las ecuaciones de movimiento resultan ser no lineales y por ende toda los resultados aplicables a la cuantización de los campos libres de Klein-Gordon, Dirac, Proca y Maxwell no aplican. Sin embargo, bajo algunas hipotesis, puede garantizarse el fenomeno no intuitivo de que la interacción es *apagada asintoticamente* para $t \to \pm\infty$ en el sentido de que existen estados (llamados asintoticos) que evolucionan (en el picture de Schrodinger) como los de la teoría libre. Esto permite plantear la matriz de Scattering entre estados de la teoría libre. Estos estados iniciales y finales se denominan in y out. Esta amplitud puede hallarse perturbativamente como expansión en torno a la (o las)constante(s) de acoplamiento igual a 0. En esta guía, luego de algunos ejercicios mas bien conceptuales, veremos como implementar ese calculo perturbativo mediante las reglas de Feynman.

Consideraciones generales

1. Considere el caso simple e ilustrativo del lagrangiano que resulta de agregar un término $-\lambda\phi^4$ (con $\lambda > 0$ al lagrangiano de Klein-Gordon para un campo real.

   (a) Halle la ecuación de movimiento y vea que ahora una onda plana no es solución (es trivial ver esto último).

   (b) Proponga alguna condición asintotica para $t \to \pm\infty$ para las soluciones de la ecuación previa de tal forma que para $t \to \infty$ las soluciones de la ecuación se parezcan a las de la teoría sin interacciones.

2. (A discutir en clase) La función de dos puntos ya no tiene la forma hallada para el caso del campo libre. Sin embargo, bajo ciertas hipotesis sobre el espectro de la teoría cuántica, puede verse que tendra la forma de *Kallen-Lehmann*:

$$< 0 \mid \phi(x)\phi(y) \mid 0 >= \int_0^\infty \rho(s)\Delta(x-y;s)ds$$

   siendo Δ la función de dos puntos del campo libre de masa s y ρ una funcón de s con ciertas propiedades generales. Busque en la bibliografía la expresón de esta y vea cual es el argumento que conduce a esa expresión.

3. Muestre que para una teoría interactuante generica, que respete los requisitos generales de una teoría cuantica de campos relativista, vale lo siguiente:

   (a) Si se parte del vacio a $t = -\infty$ el estado final a $t = +\infty$ seguira siendo el vacio.

   (b) Suponiendo que el espectro de masas en la teoria interactuante tiene un gap entre 0 y un valor m, el estado asintotico de una partícula de masa m es estable.

4. Porque se dice que $< 0_{out} \mid 0_{in} >$ debe ser una fase?

5. Muestre que, en la electrodinamica cuántica, no es posible el proceso en el que un electron y un positron se aniquilan dando lugar a un solo foton.

I. Cálculo de la amplitud de scattering utilizando reglas de Feynman

6. Considere el lagrangiano de la teoría descripta en item 1. Enuncie las reglas de Feynmann para este caso y vea que modificaciones deberia hacer si el campo fuese complejo.

7. * En la teoría anterior, dibuje los diagramas hasta orden 2 en la constante de acoplamiento para el proceso de dos particulas inciales y dos finales, distinguiendo aquellos:

   (a) Diagramas desconexos (burbujas). Es decir, aquellos en que las patas externas no se conectan a ningun vertice. Porque no eson estos relevantesp para el cálculo de la matriz de Scatering?

(b) Diagramas con correcciones radiativas (es decir, aquellos en los que hay vertices en las patas externas). Porque no suelen incluirse estos diagramas en el calculo de la amplitud?

(c) Diagramas restantes.

8. Halle la amplitud al orden mas bajo para el proceso $1 + 2 \to 3 + 4$ utilzando las reglas de Feynman y por cálculo directo utilizando el teorema de Wick.

9. Utilizando consideraciones geometricas sobre los grafos totalemente conexos (y sin las correcciones radiativas) muestre que vale la siguiente relacion entre numero de patas externas E y numero de vertices n:

$$2(n + 1) = E$$

, de donde se desprende que la amplitud para un procesom con un numero de patas externas impares debe ser cero.

10. * Enuncie las reglas de Feynman para la electrodinámica que describe el acoplamiento de un campo de Dirac de masa m con el campo electromágnetico.

11. Usando las reglas anteriores halle la amplitud de Feynman para los siguientes procesos al orden mas bajo no trivial, dibujando los diagramas de Feynman que contribuyen al proceso:

    (a) * Scattering de Bhabha $e^+e^- \to e^+e^-$

    (b) Scattering de Moller: $e^-e^- \to e^-e^-$

    (c) * Aniquilación de pares

    (d) Creación de pares

    (e) Scattering de Compton (scattering elástico electrón-fotón)

12. Enunciar las reglas de Feynman para la teoría descripta por el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = D_\mu \varphi^\dagger D^\mu \varphi - m^2 \varphi^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad \text{con} \quad D_\mu \varphi \equiv (\partial_\mu - ieA_\mu)\varphi \, .$$