Teoría Cuántica de Campos. *Primer Cuatrimestre 2018*

Guía 5B: Calculo de sección eficaz , vida media.

En esta última guia veremos la vinculación entre las amplitudes calculadas en la guía anterior y cantidades observables en experimentos de fśica de particulas como la sección eficaz y vida media.

1. Para el cálculo posterior de la sección eficaz, es util aislar una cantidad invariante de Lorentz de la expresion de la matriz de Scatering, aislando factores dependientes del momento de las particulas iniciales y finales. Si S es la matriz de Scatering y S_{fi} su elemento de matriz para estados iniciales y finales i y f, la cantidad M_{fi} se define a partir de:

$$(S-1)_{fi} = i(2\pi)^4\delta^4(k_f - k_i)M_{fi}\prod_{i=1}^{N}\frac{1}{(2\pi)^3 2\omega_i}$$

siendo N el numero total de particulas. Se asumio aquí que todas las particulas son bosonicas. (Debe agregarse factores $2m_i$ por cada partícula asociada a un campo de Dirac masivo).

Verifique que en los casos de la guía anterior esta cantidad es invariante de Lorent y que en esos casos (procesos del tipo $1+2 \to 3+4$) puede escribirse en términos de las *variables de Mandelstan*, invariantes de Lorentz:

$$\begin{aligned} s &= (k_1+k_2)^2 = (k_3+k_4)^2 \\ t &= (k_1-k_3)^2 = (k_2-k_4)^2 \\ u &= (k_1-k_4)^2 = (k_2-k_3)^2 \end{aligned}$$

2. La sección eficaz se define para un proceso de N particulas, con dos particulas iniciales y $N-2$ finales. Su expresión se obtiene a partir de un cálculo relativamente simple pero feo (aunque en algunos libros se hace con prolijidad. Vea paginas 232-234 del libro de Ryder) y se expresa en terminos de la amplitud M_{fi} de Feynman de la siguiente manera que (la expresión asume que se usa un sistema de referencia *colineal* en que las particulas incidentes tienen sus velocidades en la misma dirección):

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \mid M_{fi} \mid^2 \delta^4(k_f - k_i)}{4\sqrt{(k_1k_2)^2 - {m_1}^2{m_2}^2}}\prod_{i=3}^{N}\frac{d^3k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i}$$

Se asumio aquí que todas las particulas son bosonicas. (Debe agregarse factores $2m_i$ por cada particula asociada a un campo de Dirac masivo) Considere el caso particular en que $N=2$ (es decir, dos particulas iniciales y dos finales) y que las particulas son bosonicas.

(a) Muestre que para el caso de un proceso *elastico* (no hay cambio en las masas de las particulas finales) la expresión de la sección $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ en el sistema centro de masa es:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2(E_1+E_2)^2}\mid M_{fi} \mid^2$$

siendo E_1 y E_2 las enegias de las partículas en el sistema centro de masa y Ω el ángulo solido asociado al momento de una de las particulas elegidas para parametrizar el estado final.

(b) Repita el cálculo para el caso general de un proceso inelastico. Puede considerar para simplificar que se trata de un proceso en que tanto las particulas inciales como las finales tienen la misma masa.

(c) En la deducción de la sección eficaz, en realidad aparece el factor $\frac{1}{/}E_1E_2 \mid \vec{V_2} - \vec{V_1} \mid$ no explicitamente invariante de Lorentz. De todas formas, si bien las energias y la velocidad relativa $\mid \vec{V_2} - \vec{V_1} \mid$ no son invariantes de Lorentz, este producto resulta el mismo para todo sistema colieneal, es decir, para todo sistema en que las particulas incidentes

se muevan en una misma linea, incluyendo el caso especial en que una de ellas esta en reposo. Mustre que en efecto para tales sistemas $E_1 E_2 \mid \vec{V_2} - \vec{V_1} \mid = \sqrt{(k_1 k_2)^2 - {m_1}^2 {m_2}^2}$. La inversa de esta cantidad tiene dimensiones de area y su invariancia ante cambios de sistemas colineales es consistente con su interpretación de area de una superficie transversal a la dirección de las particulas. A que se reduciria este factor en el caso del efecto Compton?

3. * Considere algunos de los siguientes procesos y halle la seccón eficaz diferencial para el orden más bajo en los procesos:

   (a) Scattering de Bhabha

   (b) Scattering de Moller

   (c) Aniquilación y creación de pares

   Considere en todos los casos que las polarizaciones de los estados finales e iniciales estan sumadas y promediadas, respectivamente.

4. Discutir los límites ultrarelativista y no- relativista para la sección eficaz de dispersión electrón-positrón en el sistema centro de masa al orden perturbativo más bajo.

5. En el caso del proceso de creación de electrón-positrón a partir de dos fotones, discutir los casos de energía próxima al umbral o mucho mayor que el umbral.

6. Analizar la sección eficaz de Compton en el sistema centro de masa y pasarla al sistema en que el electrón inicial está en reposo. En ese caso, discutir los límites de alta y baja energía del fotón incidente.

7. * Sabiendo que un proceso $A + B \to C + D$ tiene amplitud no nula para una eleccion de momentos k_1, k_2, k_3, k_4 asociados a A, B, C, D respectivamente, muestre que tambiés es posible el proceso $A + \overline{C} \to C + \overline{B}$ (donde $\overline{(.)}$ significia antiparticula de..). Para ver esto:

   (a) Vea en general que si era posible satisfacer la conservación de cuadrimomentos en el primer caso, tambien sera posible satisfacerlas en el segundo.

   (b) Reconsidere los procesos de Moller y Bhabha. Vea como ambos se relacionan por el intercambio de particulas finales y como se obtienen los diagramas vistos en la guía anterior (de uno o otro proceso) mediante una pasaje de patas iniciales a finales.

   (c) Vea que regla de sustitución sencilla para los momentos iniciales y finales debe hacer a fin de obtener una sección eficaz a partir de la otra. Esa relación es un ejemplo de lo que se conoce como *crossing symmetry*.

8. **Simetría CPT**: Se puede mostrar, a partir de la invariancia de Poincare (mas precisamente, de la simetría de la parte de Poincare conectada continuamente con la identidad) que toda teoría cuantica de campos relativista (en $D + 3 + 1$) que cumpla ciertos requisitos generales (como invariancia de Poincare de un estado (el vacio) energía acotada por debajo, conmutación/anticonmutación para puntos espacialemente separados, etc) tiene de yapa una simetría discreta denominada CPT que consiste en la simultanea operación de cambiar partícula por antiparticula (C), invertir la dirección del tiempo (T) y hacer una reflexion espacial (P) (estas operaciones se pueden definir sin hacer alusión a la interpretación de particula). QED en particular es simetrica ante cada operación por separada, mientras que en el modelo standard ninguna por separado es simetría.

   Para el caso de QED, verifique que la amplitud de Feynman es invariante ante C y T (note que estas simetrias relacionan procesos diferentes). La dificultad mayor del ejercicio esta en entender en que se traduce la operación de simetría a checkear.

9. La tasa de decaimiento (suena mejor *decay rate*) se define para un proceso en que una particula inicia decae o se transforma en N particulas. Esta tasa un numero que dice cu'al es la probabilidad por unidad de tiempo de que la particula inicial decaiga en otras. Su expresion es similar a la sección eficaz:

$$\Gamma = \frac{(2\pi)^4}{2E_i} \int \prod_{i=2}^{N} \frac{d^3 k_i}{(2\pi)^3 2\omega_i} \mid M_{fi} \mid^2 \delta^4(k_f - k_i)$$

El tiempo de vida media τ se define como $\tau \equiv \frac{1}{\Gamma}$.

Verifique que esa cantidad tiene unidades de tiempo y que transforma como debe ante un boost de Lorentz. Busque en internet los valores de vidas medias de algunas particulas elementales y piense en la razon posible de su diferencia.

10. Argumente porque el vacio debe ser estable, es decir, porque no puede decaer a nada. Cuales serian los diagramas de Feynman asociados a este decaimiento y porque no contribuyen? (piense en $\lambda\phi^4$ para fijar ideas). De la misma manera, argumente que no puede haber decaimiento para la partícula de menor masa en el espectro.

11. Considere el caso de una teoría de dos campos escalares reales, ϕ_1 y ϕ_2, de masa M y m respectivamente, acoplados con un termino de la forma:

$$L_{Int} = -\lambda\phi_1{\phi_2}^2$$

(este modelo tiene un pequeno problema con la energía. No debe tomarse en serio mas que como una forma de ejemplificar el cálculo de τ). Asumiendo $M > 2m$ halle la vida media de las particulas asociadas al campo ϕ_1 al orden más bajo en potencias de λ. Diga que ocurre en el limite $M \to 2m$ y considere el caso $M < 2m$.

Relaciones útiles para el cálculo de la sección eficaz cuando hay campos de Dirac

1. Demostrar (o al menos entender que significan) las siguientes identidades para las trazas de matrices gamma, utiles para el cálculo de la sección eficaz:

   (a) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}$

   (b) $Tr(\gamma^{\mu_1}\gamma^{\mu_2}...\gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$

   (c) $Tr(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\rho\gamma^\sigma) = 4(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})$

   (d) $Tr(\not{a}_1\not{a}_2..\not{a}_{2n}) = a_1.a_2Tr(\not{a}_3..\not{a}_{2n}) - a_1a_3Tr(\not{a}_2..\not{a}_{2n}) + a_1a_{2n}Tr(\not{a}_2..\not{a}_{2n-1})$

2. Demuestre que:

$$\sum_{s,s'=1,2} \mid \bar{u}(\mathbf{k},s)Mu(\mathbf{k}',s') \mid^2 = Tr(\gamma_0 M^\dagger \gamma_0 \frac{\not{k}+m}{2m} M \frac{\not{k}'+m}{2m})$$

donde M es una matriz de $4x4$ cualquiera y k y k' son momentos arbitrarios que satisfacen $k^2 = m^2$ (Nota: esta relación es crucial para el cálculo de la sección eficaz y permite sacar provecho a las relaciones del ejercicio precedente).