

Parcial. Comentarios y resolución de algunos items

1. En este primer ejercicio aparecen muchas de las cosas vistas en la practica 2 y 3.

- (a) Claramente, dado un lagrangiano, la función de dos puntos no puede tener cualquier forma funcional dado que obedece la ecuación del campo correspondiente. En este caso, la de un campo de Klein Gordon sin masa. A diferencia del propagador, que incluye un factor discontinuo, el D'Alambertiano aplicado a la función de dos puntos da 0 (no la delta). Dado que la expresión que se daba para la función de dos puntos era valida solo en puntos no coincidentes (y ademas fuera del cono de luz), no hubiese afectado igualar a la delta el resultado de la aplicación del D'Alambertiano.

El calculo de $\partial^\mu \partial_\mu F$ requiere solo un renglon y de ahí surge que $N = 1$ (algunos pocos lo hicieron así: ver parcial de Javier Badia por ejemplo). También podía de hecho intentar deducir esa expresión, repitiendo el analisis del ejercicio 7 (indicado con Burro y asterisco) y de ahí concluir cuanto tiene que ser N . Muchos optaron por ese camino. El analisis dimensional se les ocurrió a muchos, aunque no se esperaba que fuera el único camino sino un atajo para quién quisiera.

Un par de observaciones para aprender algo mas de este ejercicio:

- La ausencia de masa restringe fuertemente la dependencia funcional. Para el caso masivo se espera que la función de dos puntos vaya como $1/s^2$ por un factor adimensional. Cuando hay masa, hay formas no triviales de hallar este factor adimensional: podría ser cualquier función de s/m . Esto hace que ya no se pueda decir que la función de dos puntos va como la distancia Minkowskiana a la -2 .
- Noten que esta dependencia funcional resuena mucho a la forma funcional de soluciones de la ecuación de Laplace. En efecto, la única diferencia entre el D'Alambertiano y el Laplaciano es un signo menos relativo entre la derivada segunda temporal y las espaciales. Si $F(t, x, y, z)$ es solución de Laplace, $F(it, x, y, z)$ será solución de la ecuación de Klein Gordon sin masa (suponiendo que el reemplazo de t por it tenga sentido en F ; lo tendrá si F admite una continuación analítica)

Es sabido que hay en D dimensiones (con $D > 2$) una expresión de la forma $1/r^{D-2}$ (siendo r la distancia Euclidea) es solución para $r \neq 0$. En D igual a 4, tendríamos $\frac{1}{r^2}$. Si bien esta es solución del Laplaciano (para $r \neq 0$), se puede obtener la solución para el D'Alambertiano simplemente cambiando la coordenada temporal por i veces la misma coordenada. Esto ayuda a ver en un contexto mas amplio la dependencia funcional para puntos diferentes.

Noten ademas que $1/r^{D-2}$, extendida a todo r (e interpretada ya como distribución) satisface la ecuación de Laplace inhomogénea, con una delta de Dirac en el miembro derecho. Esto podría sugerir que con el procedimiento anterior también podría obtenerse el propagador de Klein-Gordon, pero eso ya es un poco más sutil.

- (b) **Horror:** Respecto a mostrar que esa constante que va en el numerador es real, en el curso de la demostración se ha visto muchas veces caer en el siguiente horror que espero que el miktex logre compilarlo:

$$\langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle^* = \langle 0 | \phi^*(x)\phi^*(y) | 0 \rangle$$

El caracter masivo de la caída en este error fue llamativa y lo tendré en cuenta para enfatizarlo en una futura cursada. ϕ es un operador. Que significa conjugarlo? Tomar el adjunto? Si es así, la igualdad anterior es incorrecta. Imagino que no quisieron decir esto sino mas bien algo analogo a la mera operación de conjugar (sin trasponer). Si ϕ fuese una matriz compleja, tendría todo el sentido conjugar la matriz. Sería daggear pero sin trasponer. Pero no creo que estuvieran pensando en la extensión a operadores de la operación conjugar. Como sea, un camino para probar que c es real es el siguiente:

$$F(x, y)^* = \langle 0 | \phi(x)\phi(y) | 0 \rangle^* = \langle 0 | \phi^\dagger(y)\phi^\dagger(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \phi(y)\phi(x) | 0 \rangle = F(y, x)$$

Se uso para la primera igualdad la identidad $(v, ABw)^* = (w, (AB)^\dagger v) = (w, B^\dagger A^\dagger v)$ valida para operadores A y B e un Hilbet, con $(., .)$ el producto interno y v, w vectores. Aquí, $v = w = | 0 \rangle$. Para la segunda, se uso que el

campo es real, lo cual significa que $\phi^\dagger = \phi$ (y no que $\phi^* = \phi$: esto último es lo que ocurre para el campo clásico; es la condición clásica de realidad).

De la última igualdad y del hecho de que la distancia no cambia al permutar x con y se desprende que c es real. La idea de este ítem no era llevar a nadie a que pise el palito con cuestiones de operaciones en el Hilbert sino el de inducir a sacar jugo a todas las restricciones que hay sobre la función de dos puntos que se deben a que es el valor de expectación en vacío de un producto de operadores.

La conmutación del campo para puntos temporalmente separados sale en menos de una línea, usando que el campo es un campo libre y por ende su conmutador es proporcional al operador identidad, tal como se enfatizó muchísimas veces. Ese significa que que $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ | $[\phi(x), \phi(y)] | 0 > 1$ identidad = $F(x, y) - F(y, x)$. Esto vale para todo campo libre. Lo que ocurre en especial en el caso sin masa es que debido a que $F(x, y)$ es igual a $F(y, x)$ entonces el conmutador se anula, *incluso para puntos temporalmente separados*. Esta además decir que para puntos espacialmente separados también debe ser cero el conmutador. Es el requisito denominado microcausalidad. El hecho de que este campo describe partículas de masa cero está detrás del hecho de que el conmutador es distinto de cero solo para puntos con distancia Minkowskiana nula, aunque no es obvia la interpretación.

Noten que esta conclusión es aplicable a cada componente del campo de Maxwell, en la cuantización discutida en la práctica, según la cual se pide que cada A_μ satisfaga la ecuación de Klein Gordon sin masa.

- (c) Respecto a los demás puntos, no hay mucho que agregar. Lo único relevante es enfatizar que las relaciones canónicas de conmutación no solo son las de ϕ con Π sino las de ϕ con ϕ . Estas últimas, para un campo escalar real, son:

$[\phi(x, t), \phi(y, t)] = 0$, para todo para x, y . Noten que de aquí se desprende, derivando respecto a y , que también valdrá $[\phi(x, t), \partial_i \phi(y, t)] = 0$ (denotando por i a los índices 1, 2, 3 de las coordenadas espaciales. Ejercicio: porque no podría concluirse también que $[\phi(x, t), \partial_0 \phi(y, t)] = 0$? Esto contradeciría las reglas canónicas de conmutación. El último inciso pedía calcular el conmutador con D y confirmar que da lo esperado. Se recomienda ver el ejercicio 2 de la guía 3, donde se discute algo análogo que hemos enfatizado mucho en la práctica: que a una simetría de la teoría le corresponde un operador unitario que realiza la transformación en el campo mediante $U\phi(x)U^{-1} = \tilde{\phi}$, siendo $\tilde{\phi}$ el campo transformado. En este caso, este último es $\lambda\phi(\lambda x)$. Y de la acción finita se desprende lo que ocurre a nivel infinitesimal.

2. Clásicamente, la conjugación de carga sobre un espinor de Dirac se define como $\psi_c = C\bar{\psi}^T$ con una matriz C que cumple $C\gamma^\mu C^{-1} = -(\gamma^\mu)^T$ y $C^{-1} = C^\dagger = C^T = -C$. Puede demostrarse que ante conjugación de carga, las soluciones de la ecuación de Dirac transforman de la siguiente manera: $C\bar{u}^T(p, s) = v(p, s)$, $C\bar{v}^T(p, s) = u(p, s)$.

Esta simetría clásica subsiste a nivel cuántico en algunos modelos, como el caso de un campo de Dirac libre e implica la existencia de un operador unitario \hat{C} que actúa de la siguiente manera:

$$\hat{C}\hat{\psi}(x)\hat{C}^{-1} = C\hat{\psi}^T, \quad \hat{C}\hat{\psi}^\dagger\hat{C}^{-1} = -\hat{\psi}^T C^\dagger.$$

- (a) A partir de la última expresión y del desarrollo en modos del campo de Dirac, deduzca la acción de \hat{C} sobre los operadores de creación y destrucción. Es decir, obtenga expresiones para:

$$\hat{C}\hat{b}(p, s)\hat{C}^{-1}, \quad \hat{C}\hat{b}^\dagger(p, s)\hat{C}^{-1}, \quad \hat{C}\hat{d}(p, s)\hat{C}^{-1}, \quad \hat{C}\hat{d}^\dagger(p, s)\hat{C}^{-1}.$$

 Escribiendo al campo de Dirac en su desarrollo en modos tenemos:

$$\psi = \int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{k_0}} \sum_s \left[\hat{b}(p, s)u(p, s)e^{-ipx} + \hat{d}^\dagger(p, s)v(p, s)e^{ipx} \right]$$

Aplicando la condición

$$\hat{C}\hat{\psi}(x)\hat{C}^{-1} = C\hat{\psi}^T$$

y usando $C\bar{u}^T(p, s) = v(p, s)$ y $C\bar{v}^T(p, s) = u(p, s)$ llegamos a

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{k_0}} \sum_s \left[\left(\hat{C}\hat{b}(p, s)\hat{C}^{-1} \right) u(p, s)e^{-ipx} + \left(\hat{C}\hat{d}^\dagger(p, s)\hat{C}^{-1} \right) v(p, s)e^{ipx} \right] =$$

$$\int \frac{d^3k}{\sqrt{(2\pi)^3}} \sqrt{\frac{m}{k_0}} \sum_s \left[\hat{b}^\dagger(p, s)v(p, s)e^{ipx} + \hat{d}(p, s)u(p, s)e^{-ipx} \right]$$

Teniendo en cuenta que los modos del campo son funciones linealmente independiente podemos igualar para cada p y obtener:

$$\begin{aligned}\hat{C}b(p, s)\hat{C}^{-1} &= d(p, s) \\ \hat{C}d^\dagger(p, s)\hat{C}^{-1} &= b^\dagger(p, s)\end{aligned}$$

- (b) Verifique que $\hat{C} \equiv \exp \left[i\frac{\pi}{2} \int \sum_s (d^\dagger(k, s)b(k, s) + b^\dagger(k, s)d(k, s) - b^\dagger(k, s)b(k, s) - d^\dagger(k, s)d(k, s)) d^3k \right]$ cumple con los requisitos hallados previamente.

Ayuda: $[AB, C] = A\{B, C\} - \{A, C\}B$.

Fórmula de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH):

$$e^{i\lambda\hat{G}}\hat{A}e^{-i\lambda\hat{G}} = \hat{A} + i\lambda[\hat{G}, \hat{A}] + \frac{(i\lambda)^2}{2!} [\hat{G}, [\hat{G}, \hat{A}]] + \dots$$

 Para aplicar la fórmula CBH, definimos $\hat{C} \equiv \exp \left[i\frac{\pi}{2} \hat{G} \right]$, y ahora sólo tenemos que calcular conmutadores anidados de \hat{G} con d^\dagger o b :

$$[G, b(q, r)] = \int d^3k \sum_s [d^\dagger(k, s)b(k, s) + b^\dagger(k, s)d(k, s) - b^\dagger(k, s)b(k, s) - d^\dagger(k, s)d(k, s), b(q, r)]$$

De los cuatro conmutadores a calcular sólo sobreviven dos:

$$\begin{aligned}[d^\dagger(k, s)b(k, s), b(q, r)] &= 0 \\ [b^\dagger(k, s)d(k, s), b(q, r)] &= -\{b^\dagger(k, s), b(q, r)\}d(k, s) = -\delta(\vec{k} - \vec{q})d(k, r) \\ [-b^\dagger(k, s)b(k, s), b(q, r)] &= \{b^\dagger(k, s), b(q, r)\}b(k, s) = \delta(\vec{k} - \vec{q})b(k, r) \\ [-d^\dagger(k, s)d(k, s), b(q, r)] &= 0\end{aligned}$$

De esta forma,

$$[G, b(q, r)] = b(q, r) - d(q, r)$$

De la misma manera, se ve que

$$[G, d(q, r)] = -(b(q, r) - d(q, r))$$

lo que lleva a

$$\begin{aligned}[G [G, b(q, r)]] &= [G, b(q, r) - d(q, r)] = 2(b(q, r) - d(q, r)) \\ [G [G [G, b(q, r)]]] &= 2^2(b(q, r) - d(q, r)) \\ \underbrace{[G [G [G, \dots, b(q, r)]]]}_{n\text{-veces}} &= 2^{n-1}(b(q, r) - d(q, r)) \\ \Rightarrow \hat{C}b(q, r)\hat{C}^{-1} &= b(q, r) + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\pi}{2} \right)^n 2^{n-1}(b(q, r) - d(q, r)) \\ &= b(q, r) + \frac{1}{2} \sum_{n=1} \frac{1}{n!} (i\pi)^n (b(q, r) - d(q, r)) \\ &= b(q, r) + \frac{1}{2} \left(-1 + 1 + \sum_{n=1} \frac{1}{n!} (i\pi)^n \right) (b(q, r) - d(q, r)) \\ &= b(q, r) + \frac{1}{2} (-1 + e^{i\pi}) (b(q, r) - d(q, r)) \\ &= d(q, r)\end{aligned}$$

(c) Muestre que $\hat{C}\hat{b}^\dagger(p, s)|0\rangle = \hat{d}^\dagger(p, s)|0\rangle$.

 Insertando una identidad de la forma $1 = \hat{C}^{-1}\hat{C}$:

$$\hat{C}\hat{b}^\dagger(p, s)|0\rangle = \hat{C}\hat{b}^\dagger(p, s)\hat{C}^{-1}\hat{C}|0\rangle = \hat{d}^\dagger(p, s)\hat{C}|0\rangle = \hat{d}^\dagger(p, s)|0\rangle$$

donde en la segunda igualdad se usó lo deducido en a) y en la última, que \hat{C} deja invariante al vacío, lo que se puede ver al desarrollar la exponencial dada en el punto b).

3. Sobre el ejercicio este no surgieron muchos errores salvo en la primera parte, donde se pedía ver si un proceso era posible en base a leyes de conservación. La conservación del cuadrimomento es crucial. Aprovecho para decir algo que es fácil de verificar y recordar:

- Un proceso de 2 o más partículas a 2 o más es siempre posible independientemente de las masas de cada partícula
- en un proceso de 1 a 2 o más (o 2 o más a 1), hay fuertes restricciones. Si la partícula inicial tiene masa m , la suma de las finales deben ser menor o igual a la inicial.

Esas conclusiones surgen de dibujar los cuadrivectores de las partículas iniciales y finales o de pararse en el sistema centro de masa cuando es posible. Noten que, por ejemplo, si se tienen dos partículas de masa m , estas pueden dar lugar a dos o más partículas de masas arbitrariamente grande. Esto que parece contraintuitivo a simple vista se puede confirmar parandose en el centro de masa, en el que las dos partículas iniciales tienen la misma energía y momentos espaciales opuestos. La energía inicial puede ser tan grande como quiera, debido a que además de la energía en reposo ($2m$) esta la contribución de la parte cinética, tan grande como quiera. Esta puede equiparse a la energía final, no importa la grande que sean las energías en reposo de cada partícula al final. De modos que dos fotones pueden dar lugar a dos partículas de masas tan grandes como el quark top o el higgs.

Para el segundo caso, la situación cambia sustancialmente dado que, en caso de que la partícula inicial sea masiva, en el sistema centro de masa su energía esta clavada en m ; no se cuenta con la parte cinética para compensar. Por eso, las partículas finales no pueden tener masas arbitrariamente grandes. De hecho, no pueden sumar más que m . En particular, una partícula de masa m no podría dar lugar a 3 partículas de su misma masa. En el caso en que la partícula inicial sea sin masa (como el foton), una ligera modificación del argumento lleva a la misma conclusión.