



FSS

侍



### Correlation Length

Percolation

BÉLA BOLLOBÁS  
University of Cambridge and  
University of Memphis  
OLIVER RIORDAN  
University of Cambridge

It is conjectured that

$$\xi(p) = |p - p_c|^{-\nu} \text{ for } p \neq p_c \quad (46)$$

The reason for the term 'correlation length' is that  $\xi(p)$  is expected to be closely related to the probability that two sites at a given distance  $\ell$  are in the same finite open cluster: roughly speaking, this probability should decay exponentially with  $\ell/\xi(p)$

$$\xi^2 = \frac{2 \sum_s R_s^2 s^2 n_s}{\sum_s s^2 n_s} \quad (47b)$$

Thus, apart from numerical factors, the correlation length is the radius of those clusters which give the main contribution to the second moment of the cluster size distribution near the percolation threshold. We expect  $\xi$  to diverge as  $p$  approaches  $p_c$ , as

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu} \quad (47c)$$

for large  $L$  above  $p_c$ . As we shall see, there exists a typical length  $\xi(p)$ , called the *correlation length*, such that  $M(L) \propto L^{1.9}$  for  $L < \xi$ , and  $M(L) \propto L^2$  for  $L > \xi$ .  $\xi$  is a measure of the largest hole in the largest cluster, and it decreases as we increase  $p$  above  $p_c$ .

### El Cluster infinito en el umbral de percolacion

- i) Por debajo de  $p_c$  no hay cluster percolante.
- ii) Por encima de  $p_c$  si hay cluster percolante.
- iii) cuando nos acercamos al umbral  $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$

Como las cuentas se realizan sobre redes finitas vemos, que pasa en terminos de  $L$ .

Ya vimos como va la masa del mayor fragmento para los tres regimenes que nos interesan.

Por encima de  $p_c$  la masa crece con  $L$  de la forma  $L^d$

En  $p_c$  la masa va como  $L^D$ .

En esta figura se muestra que pasa con las propiedades del máximo fragmento por, apenas, encima del umbral de percolación en una red cuadrada.

$p_c = 0.592746$ . (Observar que el gráfico es linar-log pero se grafica el log de  $\bar{p}$ ).

Se grafica la densidad  $\rho$  en terminos  $L$ .

$\rho = \frac{M}{V}$   
 $= \frac{L^D}{L^d} = L^{(D-d)}$

Vemos que hay dos regimenes bien diferenciados e indica que la Masa va como

-Por debajo de la distancia de correlacion  $\xi$  va como  $L^D$ . Las rectas van como  $D-d = -0.1$

-Por encima de  $\xi$  alcanzan una cte (mientras estemos mas o menos lejos de la superficie) o sea  $D-d = 0$

Como se compatibilizan estos dos regimenes?

Para  $L < \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D$

Para  $L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.

Si dividimos el volumen  $L^d$   
 En celdas de volumen  $\xi^d$   
 La masa en cada celda es  $\xi^D$   
 Tendremos  $(L/\xi)^d$  celdas  
 La masa total es  $M \propto (L/\xi)^d \xi^D$

$M \propto (L/\xi)^d \xi^D \propto PL^d$

Pero ademas  $P \propto (p - p_c)^\beta \vee \xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$  de donde

$M \propto (L\xi)^{d-d} \propto PL^d$

Pero además  $P \propto (p-p_c)^\beta$  y  $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$  de donde

$$(p-p_c)^\beta \propto \xi^{D-d} \propto [(p-p_c)^{-\nu}]^{D-d}$$

De donde

$$\nu(d-D) = \beta \Rightarrow D = d - \beta/\nu$$

De aquí tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de  $\xi$ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresión.

Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente  $L/\xi$  luego

$$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$$

con  $m(L/\xi) = m(x)$  y si  $x \ll 1$ ,  $m(x) = cte.$  y para  $x \gg 1$ ,  
 $m(x) \propto x^{d-D} = (L/\xi)^{d-D}$ .

O sea que tenemos una relación de escala para la masa contenida en un dado volumen.

$$x = \frac{L}{\xi}$$

$x \ll 1 \Rightarrow L \ll \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D \Rightarrow m(x) = cte$

$x \gg 1 \Rightarrow L \gg \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D \Rightarrow m(x) = L^{d-D} \Rightarrow$   
 $M(L, \xi) \propto L^D \cdot L^{d-D} = L^d$

### A la Kadanoff

**2-D Ising Model**  
Kadanoff's construction

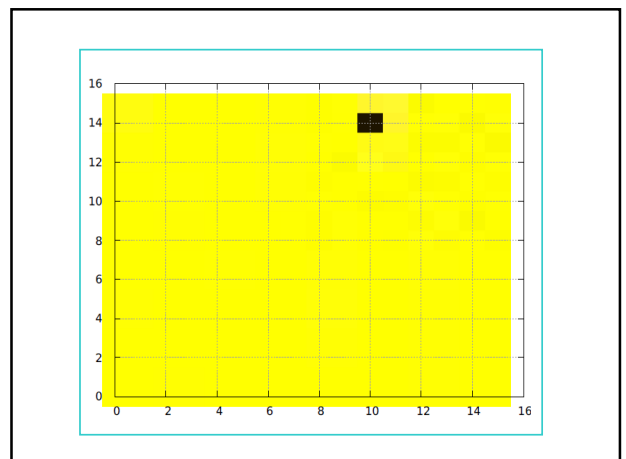
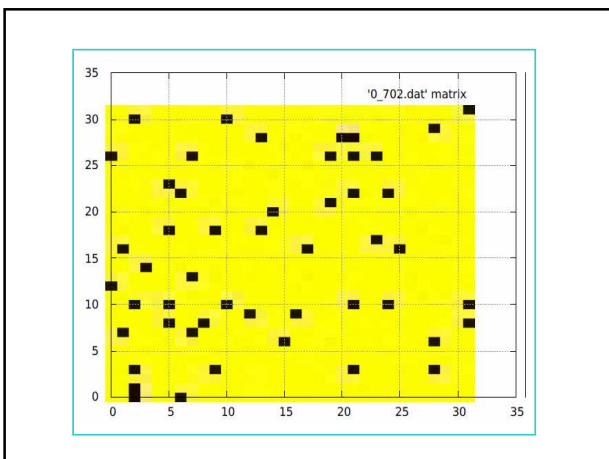
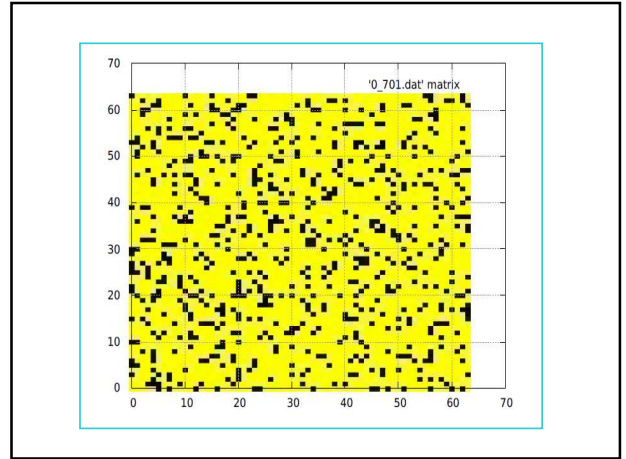
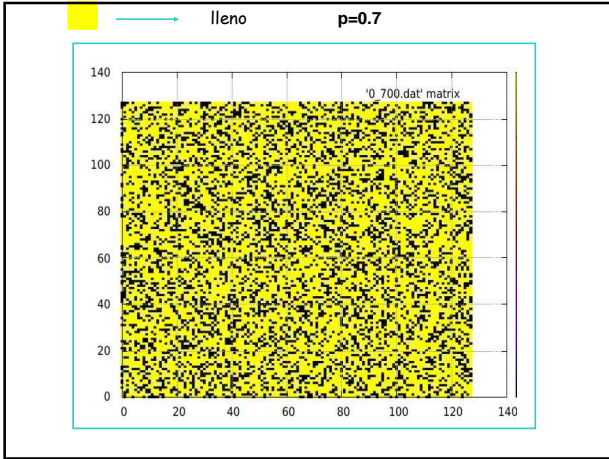
16 original spins

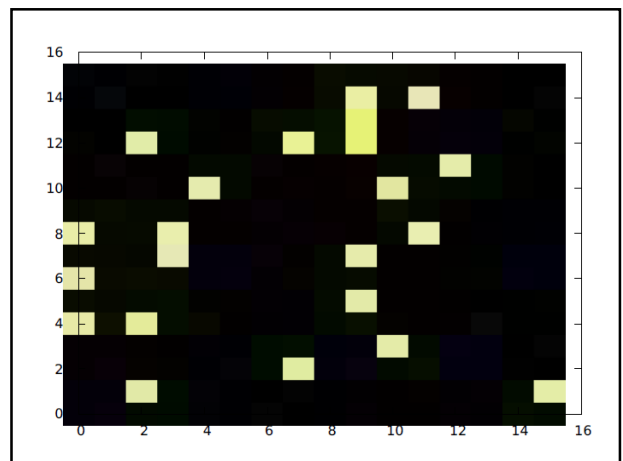
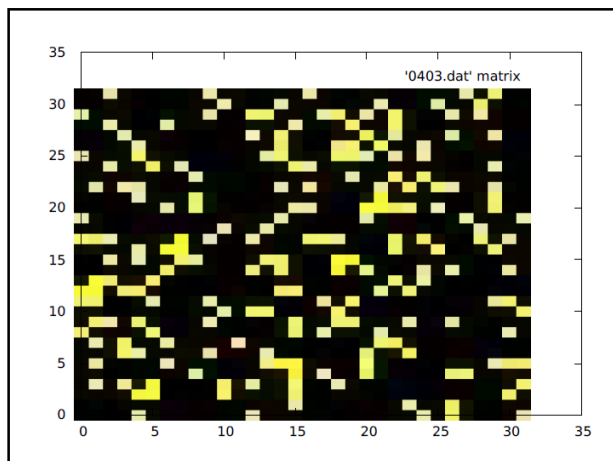
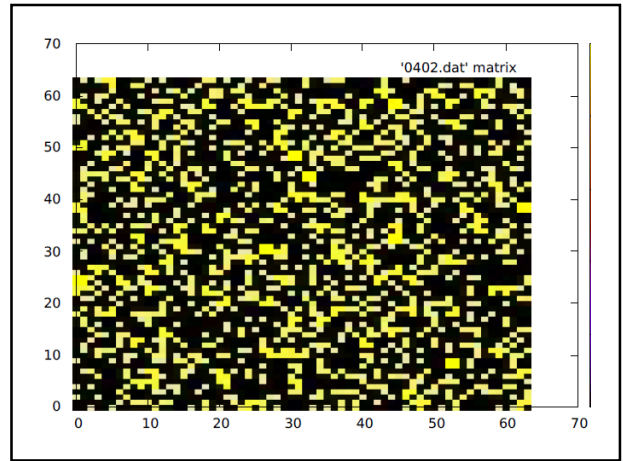
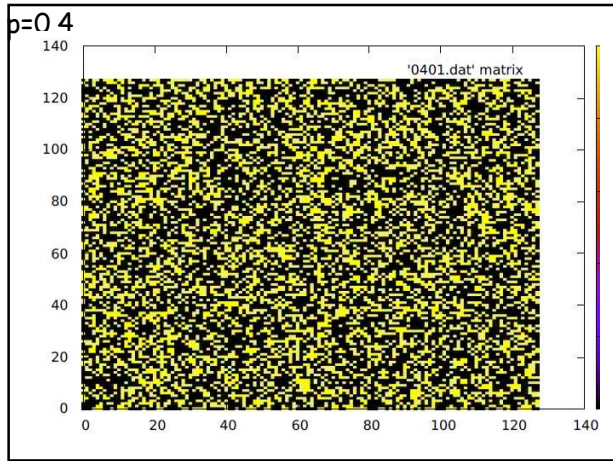
spins are well correlated on  $2 \times 2$   $\xi$

4 effective spins

renormalization

Sea :  
percolación de nodos,  
grid cuadrada





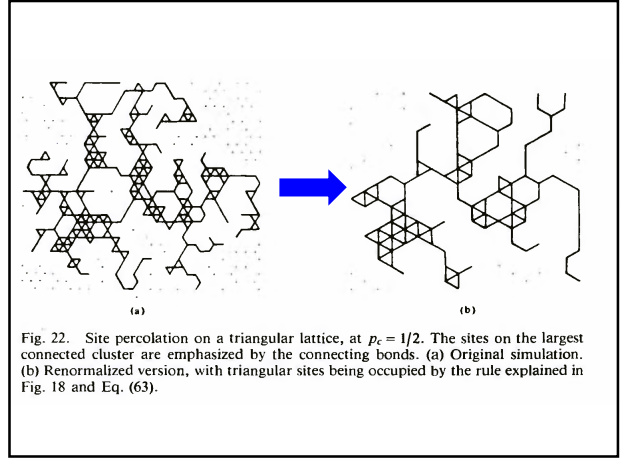
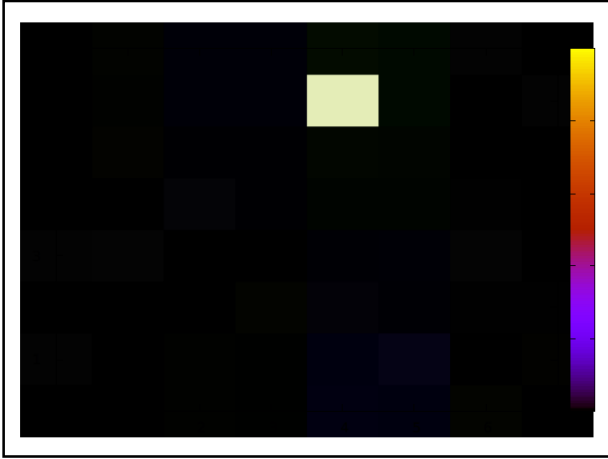


Fig. 22. Site percolation on a triangular lattice, at  $p_c = 1/2$ . The sites on the largest connected cluster are emphasized by the connecting bonds. (a) Original simulation. (b) Renormalized version, with triangular sites being occupied by the rule explained in Fig. 18 and Eq. (63).

## Renormalizacion de celda pequeña

Vimos que aparece una distancia característica  $\xi$  que es la distancia de correlacion.

Esta distancia de correlacion me marca el cambio de comportamiento (como vimos del comportamiento en la vecindad de  $p_c$ )

$$\xi = (p - p_c)^{-\nu}$$

Vimos que para

$$L < \xi \rightarrow \rho(L) = \frac{M(L)}{L^d} \propto \frac{L^D}{L^d} = L^{-\frac{D}{\nu}}, \text{ donde}$$

usamos que

$$D = d - \frac{\beta}{\nu}$$

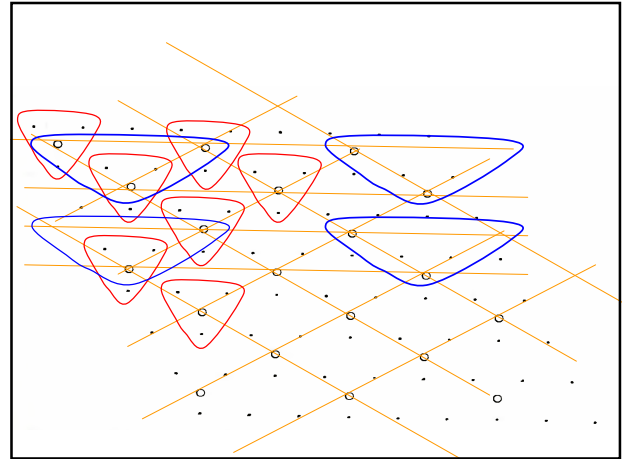
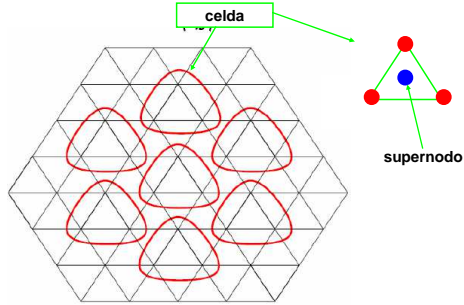
por otro lado

$$L > \xi \rightarrow P \propto (p - p_c)^\beta$$

En el punto critico desaparece uno de estos comportamientos pues  $\xi \rightarrow \infty$

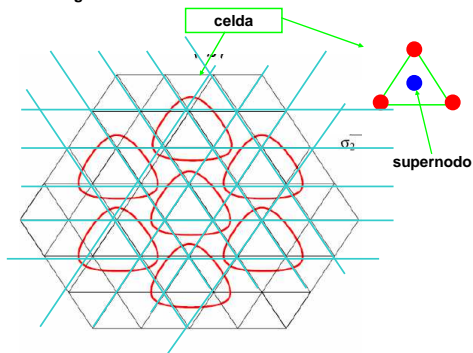
Renormalizacion en percolacion

Sea una red triangular



Renormalizacion en percolacion

Sea una red triangular



En el punto crítico el cluster percolante es autosimilar (estadísticamente) como vemos esto?

- Supongamos un proceso en el cual dividimos nuestra lattice en celdas y a cada celda le asignamos estado ocupado o vacío con algún criterio.

- Pensamos en la red triangular, formamos celdas con tres nodos que forman triángulos. El resultado de aplicar esto sobre toda la red y el resultado es una nueva red triangular.

En este caso estamos escalando con una "distancia típica"  $b = \sqrt[3]{3}$  pues  $b^2 = 3$  que es el número de nodos que contiene la celda.

$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estarán ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupación de estos nuevos supernodos es

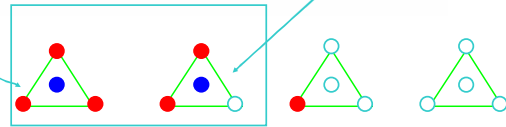
$$p' = p^3 + 3p^2(1-p)$$

Donde

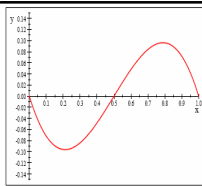
$p^3$  corresponde a la proba de tener los 3 nodos originales ocupados

$p^2(1-p)$  es la proba de tener 2 ocupados y 1 vacío. El 3 enfrente corresponde a las 3 posibles formas de hacer esto

Si estudiamos  $(p' - p)$  vemos que:



$p' - p$



De donde se ve que  $p'$  es invariante para  $p = 0$  y  $p = 1$ , que son triviales (la vacía queda vacía y la llena queda llena).

Pero hay otro punto interesante que es  $p = 0.5 = p_c$  es decir el punto crítico donde está el cluster percolate que es una fractal es también invariante!

A la  $p$  invariante la llamamos punto fijo  $p^*$

En  $p_c$

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi \rightarrow \infty \Rightarrow \forall L \rightarrow L < \xi \Rightarrow \\ M(L) \propto L^D \end{array} \right.$$

Si se escala todo en  $b$ , debe seguir valiendo la relación pues

$$\forall L \rightarrow L < \xi \Rightarrow \text{si } L \rightarrow L/b$$

$$M(L/b) \propto (L/b)^D$$

Entonces

$$M(L) \propto L^D = b^D (L/b)^D = b^D M(L/b) \Rightarrow$$

$M(L)$  es una función homogénea y la única forma posible es

$$M(L) \propto L^D$$



Para la red original

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

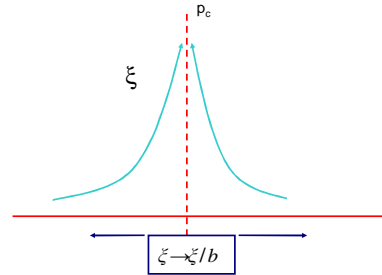
$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

De done

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \text{ de donde}$$



$$\ln(b) + \ln(p' - p_c)^{-\nu} = \ln(p - p_c)^{-\nu}$$

$$\Rightarrow -\nu[\ln(p - p_c) - \ln(p' - p_c)] = \ln(b) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln[(p' - p_c)/(p - p_c)]}{\ln(b)} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

como  $(p' - p_c)/(p - p_c) = dp'/dp = \lambda$

Volviendo al caso de la red triangular en celda pequeña obtenemos que podemos escribir  $p'$  en un entorno de  $p^*$  como

$$p' = p^* + (dp'/dp)(p - p^*) + O(p - p^*) = p^* + \lambda(p - p^*) + O(p - p^*)$$

Calculando  $\lambda$  obtenemos:

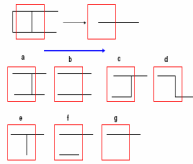
$$\lambda = (dp'/dp) = 3p^2 + 6p(1 - p) - 3p^2 = 6p(1 - p)$$

En  $p_c = 1/2$  obtenemos  $3/2$  de donde

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln \lambda}{\ln b} = \frac{\ln(1.5)}{\ln(\sqrt[3]{3})} = 0.73814 \Rightarrow \nu = \frac{1}{0.73814} = 1.3548$$

Resulta que se parece al valor exacto  $\nu = 4/3$  (J. Phys.A12,(1979),1857.)

Percolacion de nodos en la red cuadrada



- a)  $p^5$
- b)  $p^4(1-p)$
- c)  $4p^4(1-p)$
- d)  $2p^3(1-p)^2$
- e)  $2p^3(1-p)^2$
- f)  $4p^3(1-p)^2$
- g)  $2p^2(1-p)^3$

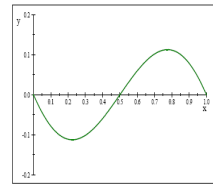
Entonces la proba de conectar las dos celdas por bonds es

$$p' = p^5 + 5p^4(1-p) + 8p^3(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 = p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)$$

$$: p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2) - p \Rightarrow$$

De donde  $p^* = 1/2$

Como  $b = 2$



resulta que

$$p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{dp'}{dp} = p^2(6p^2 - 10p + 2) + 2p(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)$$

$$= 2p(5p^3 - 10p^2 + 3p + 2)$$

en 1/2

$$2(1/2)(5(1/2)^3 - 10(1/2)^2 + 3(1/2) + 2) = \frac{13}{8} = \lambda$$

Entonces

$$1/\nu = \ln(\lambda) / \ln(b) = \ln(13/8) / \ln(2) = 0.70044$$

de donde

$$\nu = \frac{1}{0.70044} = 1.4277 \sim 4/3$$

Entonces podemos hacer el siguiente analisis:

Si estamos en el punto critico la transformacion de escala se escribe

Al pasar a "super-nodos" la masa se reduce basicamente en  $b^D$

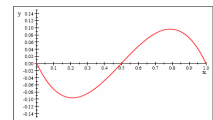
$$M(L) = b^D M(L/b)$$

o tambien  $M(L)/b^D = M(L/b)$

Esta transformacion se puede aplicar  $J$  veces:

$$M(L) = b^{JD} M(L/b^J)$$

puede hacerse con cualesquiera cantidad de pasos  $J$ ?



Sea  $L$  el tamaño de la celda en la cual trabajo

Pero que pasa si  $\xi$  es finito?

$$M(L, \xi) = b^{D_p} M(L/b', \xi/b')$$

Se acaba la celda

a) Si  $L \ll \xi$  se itera hasta que  $b^l = L$  y toda la lattice se reduce a un punto

$$M(L, \xi) = L^D M(1, \infty) \propto L^D$$

No depende de  $\xi$

$$\frac{\xi}{b^l} \rightarrow \frac{\xi}{L} \text{ con } \xi \gg L$$

b) Si  $L \gg \xi$  y  $p > p_c$

Se itera hasta que  $b^l = \xi$  ( Se acaba la autosimilaridad )

Ojo Con Los fragmentos

En ese punto  $\xi_{eff} = \frac{\xi}{b^l} = 1$

Entonces con  $p > p_c \Rightarrow p_{eff} \rightarrow -1 \Rightarrow$  El sistema se vera uniforme

Observar que  $\xi_{eff} = 1$  es el minimo

$$M(L, \xi) = b^{D_p} M\left(\frac{L}{b^l}, \frac{\xi}{b^l}\right)$$

En este caso  $b^{D_p} \rightarrow \xi^{D_p}$  y  $M(L/b^l, \xi/b^l) \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^d$  pues el sistema es "uniforme"

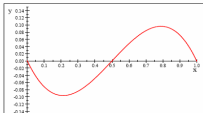
$$M(L, \xi) = \xi^{D_p} (L/\xi)^d$$

c) si  $p < p_c$  la  $p_{eff}$  sera casi 0 y  $M(x, 1)$  corresponde a grandes lattice animals y entonces  $M(L, \xi) = \xi^{D_p} (L/\xi)^{D_a}$  con  $D_a$  la dimension fractal de estos animales.

En este caso  $b^{D_p} \rightarrow \xi^{D_p}$  y  $M(L/b^l, \xi/b^l) \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^d$  pues el sistema es "uniforme"

$$M(L, \xi) = \xi^{D_p} (L/\xi)^d$$

c) si  $p < p_c$  la  $p_{eff}$  sera casi 0 y  $M(x, 1)$  corresponde a grandes lattice animals y entonces  $M(L, \xi) = \xi^{D_p} (L/\xi)^{D_a}$  con  $D_a$  la dimension fractal de estos animales.



La relación obtenida para  $\xi$  finito

$$M(L, \xi) = b^{D_p} M(L/b^l, \xi/b^l)$$

Da lugar al escaleo de tamaño finito

$$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$$

Por función homogénea

## Escaleo de tamaño finito

Vimos

$$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$$

con:  $m(L/\xi) = m(x)$

si tenemos el cluster mas grande y lo "miramos" con una ventana con

$$M(L, \xi) \propto L^D \quad L \ll \xi \Rightarrow x \ll 1 \text{ y entonces, } m(x) = \text{cte. pues}$$

$$\text{Para } L \gg \xi \text{ (con } p > p_c), M(L, \xi) \propto PL^d \text{ o } (p - p_c)^\beta L^d$$

$$\text{Para } p = p_c \rightarrow M(L) \propto L^D$$

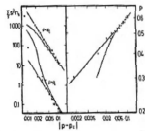
Ademas

$$\text{Para } L \ll \xi \rightarrow P(L, \xi) \propto (p - p_c)^\beta$$

$$\text{Para } L \gg \xi \rightarrow P(L, \xi) \propto L^{-(\beta/\nu)} \\ \text{con } \beta/\nu = -D + d$$

Vimos ademas que en sistemas finitos tenemos que tener cuidado con el valor de  $p_c$  que usamos pues la finitud del sistema cambia el valor del  $p_c^f$

Ademas vimos que el tamaño finito afectaba el valor de  $p_c$ :



Donde el comportamiento es difícil de entender si se estudia en términos de  $p_c = 0.5$  que es el resultado exacto, pero si se usa  $p_c = 0.5083$  (se corre el punto crítico) se recupera el comportamiento esperado para la infinita.

Cuando  $L \gg \xi$  no hay efectos de tamaño finito porque estamos trabajando "mas alla de la distancia típica de las correlaciones"

Cuando  $L \ll \xi$  estamos por contraposición cortando correlaciones.

Entonces tenemos una "relación" de  $L$  con  $\xi$

$$\xi \text{ va como } (p - p_c)^{-\nu} = \epsilon^{-\nu}$$

Luego el parámetro típico de la finitud del sistema es

$$\frac{L}{\epsilon^{-\nu}}$$

Esto esta asociado a la existencia de una escala tipica  $\xi$  que separaba dos regiones en las que una propiedad ( $M$ ) escaleaba en forma diferente.

..

Si una magnitud en el bulk tiene un comportamiento del tipo (parte singular)

$$X(x) \propto G e^{-x} = G(p-p_c)^{-x}$$

Se propone que para  $X(L)$

$$X(L,p) = (p-p_c)^{-x_1} x_2 ((p-p_c)L^{1/\nu})$$

Donde explotamos la relacion entre  $\xi$  y  $p$

Sea el caso de P

Sea  $L^d$  la "ventana"

$$L \ll \xi \Rightarrow M(L) \propto L^D$$

$$L \gg \xi \Rightarrow M(L) \propto PL^d = (p-p_c)^\beta L^d \quad (p > p_c)$$

entonces

$$P = \frac{\text{Nodos ocupados}}{\text{Nodos totales}}$$

$$\propto (p-p_c)^\beta \quad ; L \gg \xi$$

$$\frac{L^D}{L^d} = L^{-(d-D)} = L^{-\beta/\nu} \quad ; L \ll \xi$$

Observar que si tenemos una magnitud que para  $L \gg \xi$  y  $p > p_c$  y se comporta como  $[p-p_c]^{-x}$  entonces usando argumentos de Renormalizacion

Podemos proponer

$$X(L, \xi) = \xi^{x/\nu} x_1(L/\xi)$$

con

$$X(L, \xi) \propto \xi^{x/\nu} \quad \text{para } L \gg \xi$$

y

$$X(L, \xi) \propto L^{x/\nu} \quad \text{para } L \ll \xi$$

o

$$X(L, p) = (p-p_c)^{-x} x_2((p-p_c)L^{1/\nu})$$

$$M(L, \xi) = b^D M\left(\frac{L}{b^l}, \frac{\xi}{b^l}\right)$$

si  
 $L \gg \xi$  y  $p > p_c$

$$M(L, \xi) = \xi^D \left(\frac{L}{\xi}\right)^d$$

### Como se identifica $p_c$ a partir del analisis de redes finitas.

Para una red finita siempre se puede encontrar un cluster percolante (es decir para toda probabilidad  $p$ ).

Sea  $\Pi$  la proba de encontrar un tal cluster.

$\Pi$  = proba de encontrar cluster  $\infty$

Para un problema unidimensional, la probabilidad de encontrarlo es  $\Pi = p^2 = \exp(-L\xi)$  (remember  $g(r) = \exp(-r/\xi)$ ).

Para un sistema **infinito**  $\Pi(p > p_c) = 1$  y  $\Pi(p < p_c) = 0$  (ojo es un escalon, es una densidad de probabilidad si pensamos al espacio de los posibles estados como (1,2) con [0,1])

$\Pi(p, L)$  es la proba que una red de dimension lineal  $L$  percole para  $p$ .

Seguindo el ejemplo de la masa en redes finitas proponemos que

$$\Pi = \Phi[(p - p_c)L^{1/\nu}]$$

donde  $\nu$  es el exponente asociado al crecimiento de la escala típica del problema  $\xi$ .

Donde no aparece un término multiplicando a  $\Phi$  porque en  $p = p_c$  se debe cumplir que  $\Pi = 1$  (con  $\Phi(0, \infty) = 1$ )

$\Phi(x)$  debe crecer de 0  $\rightarrow$  1 con  $(x \ll p_c) \rightarrow (x \gg p_c)$

Como  $\Pi$  va entre 0 y 1 se parece a una acumulativa o distribución.

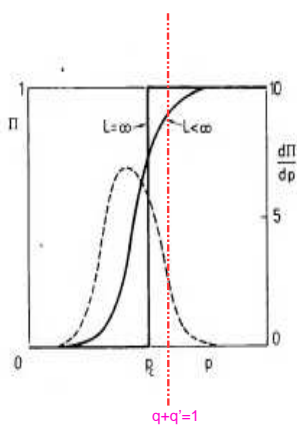
Una distribución de que?

Para el caso infinito en  $p_c$  empieza a percolar así que corresponde a pasar del estado 1 al 2.

Cuando es finito podemos discretizar y nos dice que si para cada  $p$  se realizan  $m$  experimentos  $n$  percolan entonces

$$\Pi(p) = \frac{n(p)}{m}$$

o sea la fracción de caminos que llegan al otro lado.



Si calculamos

$$\frac{d\Pi}{dp} = L^{1/\nu} \Phi'[(p - p_c)L^{1/\nu}]$$

Esto es una densidad de probabilidad pues su integral va entre 0 y 1.

Si yo voy incrementando la probabilidad de ocupación  $p$ , lo que es lo mismo, la densidad de nodos ocupados, cuando percolara por primera vez? cuando existirá por primera vez un experimento exitoso?

Sea

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{m} \frac{dn(p)}{dp} \sim \frac{1}{m} \frac{[n(p') - n(p)]}{[(p' - p)]}$$

Esquemáticamente esto se debe comportar así,  $\Pi$  en  $L \rightarrow \infty$  debe irse al escalon, su derivada a la  $\delta(p - p_c)$

$$\frac{d\Pi}{dp} = \frac{1}{m} \frac{dn(p)}{dp}$$

Pero para  $L$  finito es una "funcion ancha".

Sea  $p_{av}$  la probabilidad media a la cual por primera vez aparece un cluster percolante.

$$p_{av} = \int p \left( \frac{d\Pi}{dp} \right) dp$$

para  $L \rightarrow \infty$  da  $p_c$ .

Numericamente corresponde a tomar una red grande y empezar a ocuparla y ver cuando aparece el cluster percolante por primera vez. Repetirlo muchas veces y promediar.

Metodo alternativo : estudiar la distribucion del segundo momento

Pero lo importante es ver como este  $p_{av}$  converge al  $p_c$

$$p_{av} = \int p \left( \frac{d\Pi}{dp} \right) dp = \int p L^{1\nu} \Phi[(p - p_c)L^{1\nu}] dp$$

$$z = (p - p_c)L^{1\nu} \Rightarrow$$

$$dz = dp L^{1\nu} \Rightarrow p = p_c + zL^{-1\nu}$$

$$p_{av} = L^{-1\nu} \int z \Phi'(z) dz + p_c \int \Phi'(z) dz$$

, como  $\int \Phi'(z) dz = 1 \Rightarrow p_{av} - p_c = L^{-1\nu} \int z \Phi'(z) dz \Rightarrow$

$$p_{av} - p_c \propto L^{-1\nu}$$

O sea que  $p_{av} \rightarrow p_c$  como  $L^{-1\nu}$

Pero se ve facil que podemos definir

$$\Delta = p(\Pi = 0.9) - p(\Pi = 0.1)$$

Que es el ancho de la zona de transición que es arbitraria

a  $p$  constante

al crecer  $L$  debe compensar  $p \rightarrow p_c$

Si vario  $L \Rightarrow$  el argumento de  $\Phi[(p - p_c)L^{1\nu}]$  se debe mantener constante (tal que de 0.9 y 0.1), de donde

$$\Delta \propto L^{-\frac{1}{\nu}}$$

Por otro lado:

Si definimos

$$\Delta^2 = \int (p - p_{av})^2 \left( \frac{d\Pi}{dp} \right) dp = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle - p_{av}^2$$

entonces  $\Delta = \sqrt{\langle p^2 \rangle - p_{av}^2}$

Dado  $\Delta$  puedo determinar  $\nu$

$\Delta = p(\Pi = 0.9) - p(\Pi = 0.1)$

**Realizacion practica**

- 1) Usando secuencias de numeros aleatorios (entre 0-1) y poblamos los nodos de una celda.
- 2) Luego variamos el valor de  $p$  por debajo del cual ocupamos cada nodo.
- 3) Luego nos fijamos para cual valor de  $p$  la celda percola por primera vez

de alli se construye

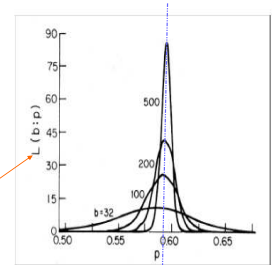


Entonces obtenemos la Densidad de probabilidad Para 32x32 , 100x100 , 200x200,500x500

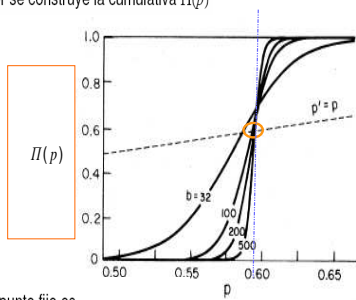
De que percole por primera vez A probabilidad  $p$

O sea que obtenemos

$$L = \frac{d\Pi}{dp}$$



A partir de lo anterior se construye la cumulativa  $\Pi(p)$  y se obtiene



la condicion de punto fijo es

$$p' = \Pi(p)$$