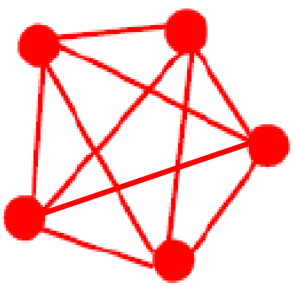
El cavernario

El Problema del cavernario

Algunos Grafos interesantes

Sea el siguiente clique



grado

$$n_l = k + 1$$

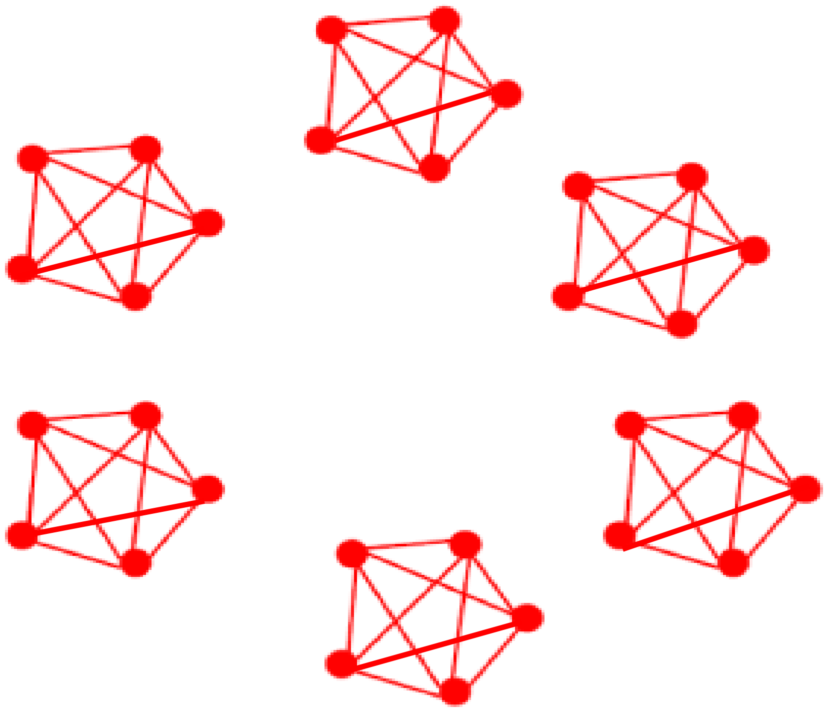
Numero de nodos

caracterizado por n_l nodos, de grado k

Como es un clique

$$\boxed{n_l = k + 1}$$

Sea el grafo compuesto por cliques



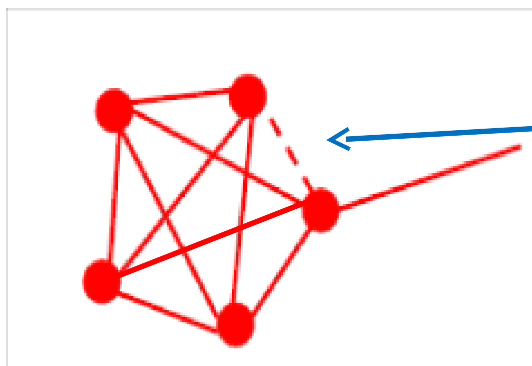
Si tenemos un total de n nodos

numero de cliques

$$n_g = \frac{n}{n_l} = \frac{n}{k+1}$$

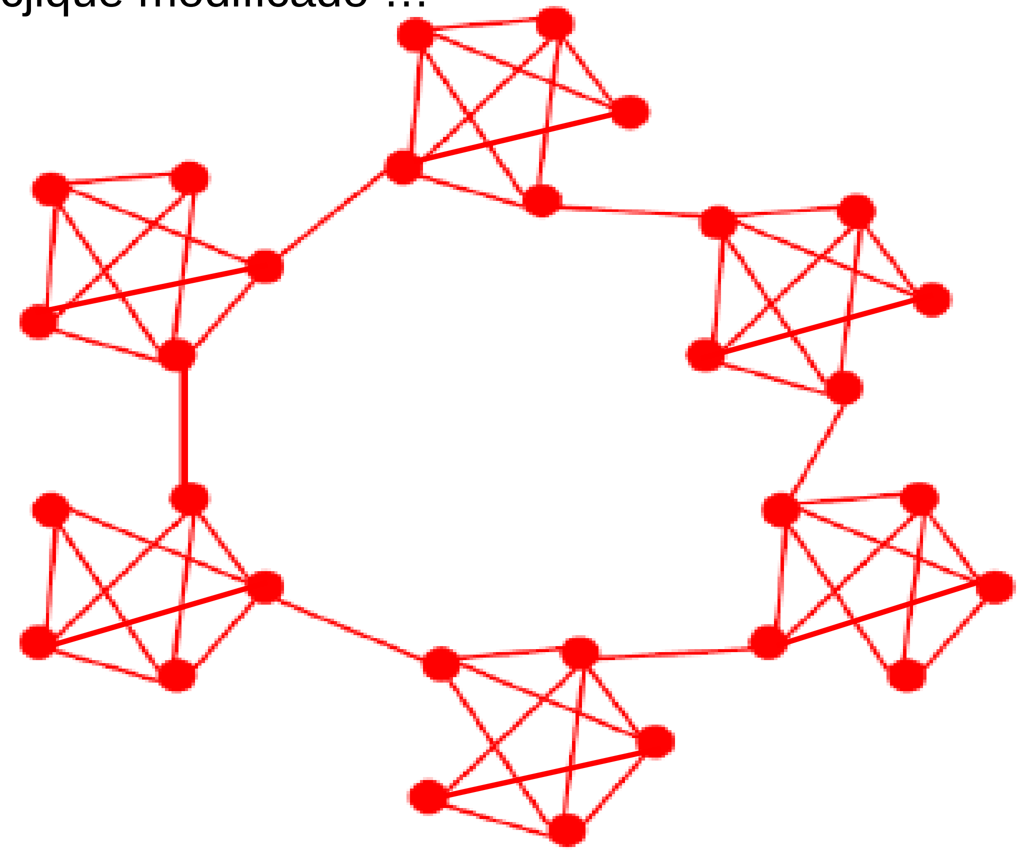
Para cada clique el coeficiente de clusterizacion (transitividad) es 1

Sea la siguiente transformacion del clique



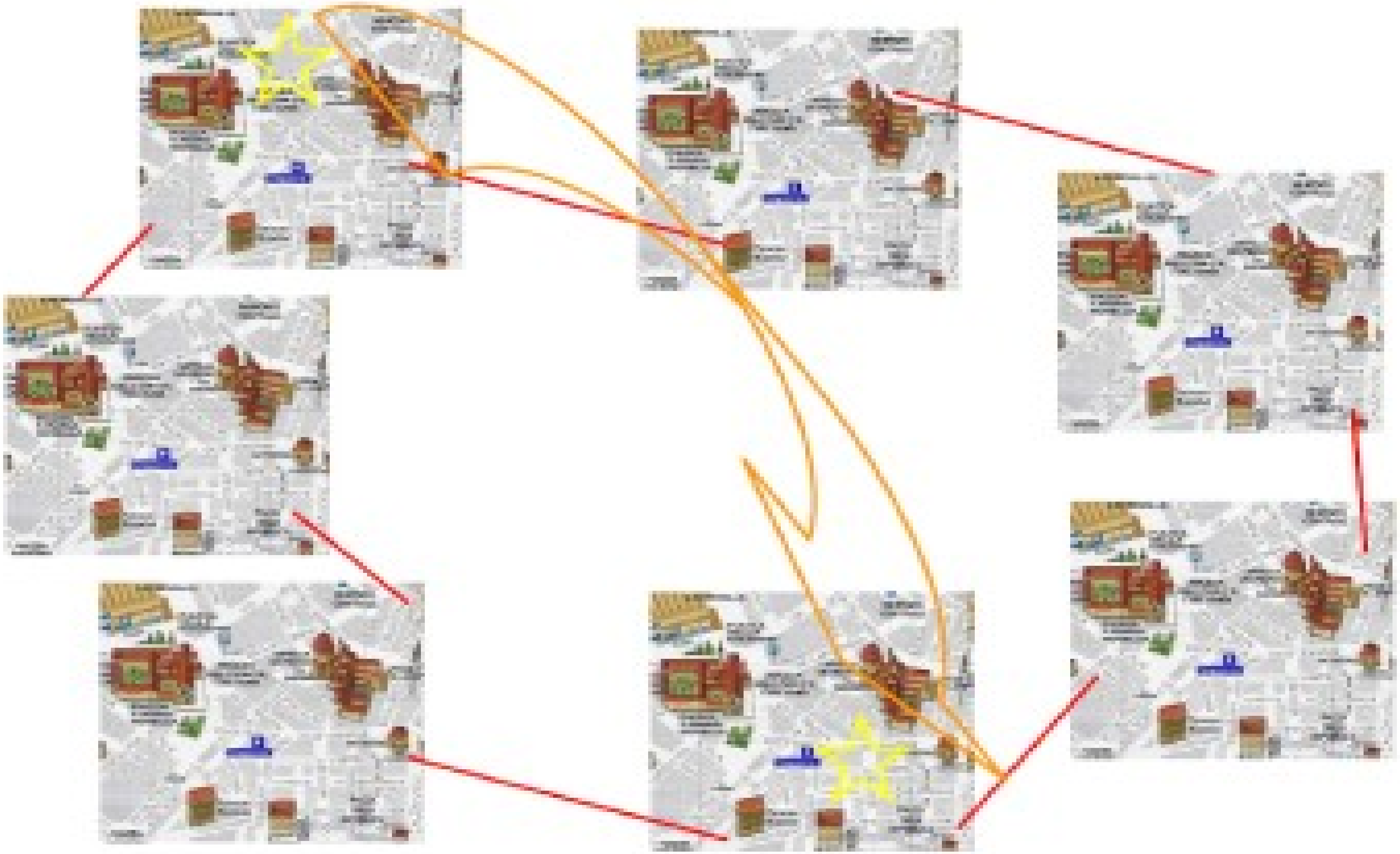
Que da como resultado

A prtir de el cjique modificado …

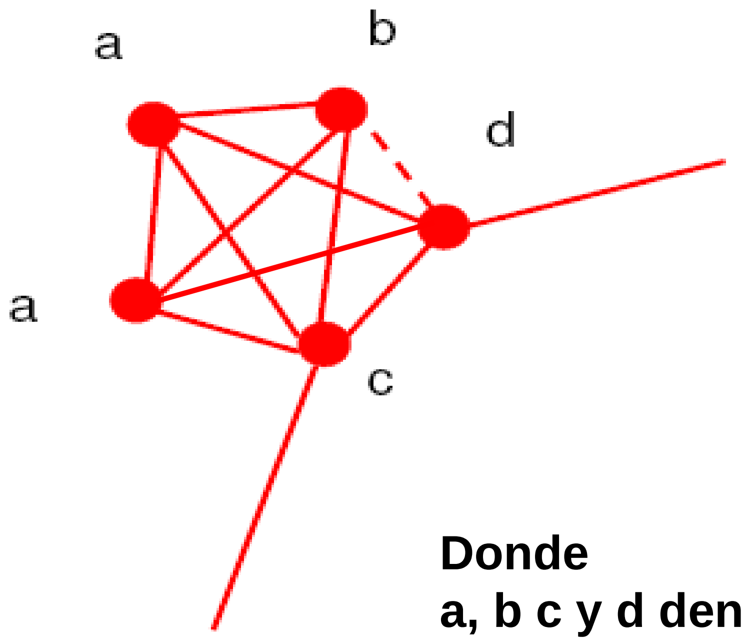


(pueblos, madrigueras?)

Que ahora es conexo.

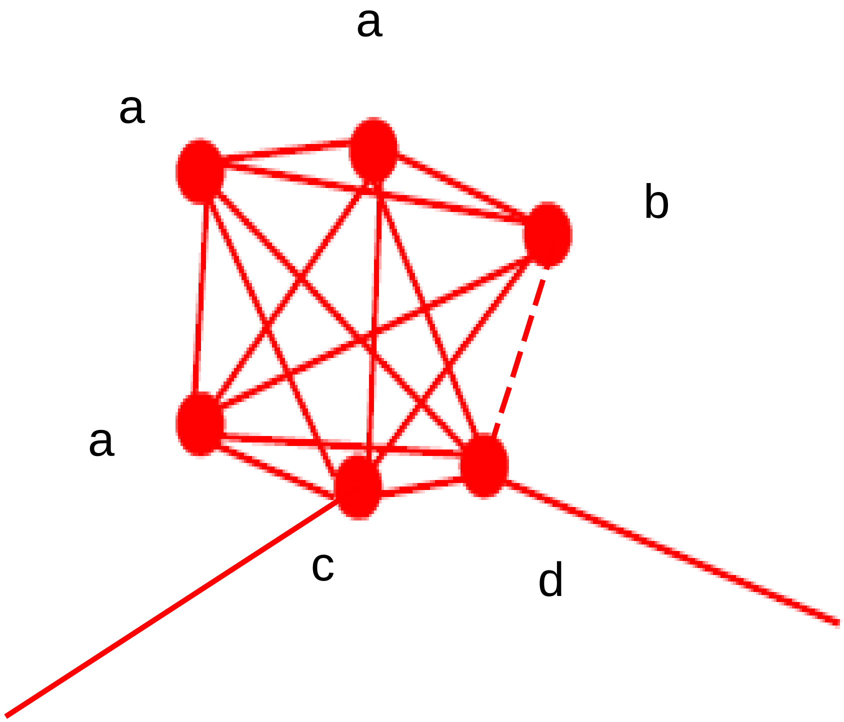


si estudiamos lo siguiente



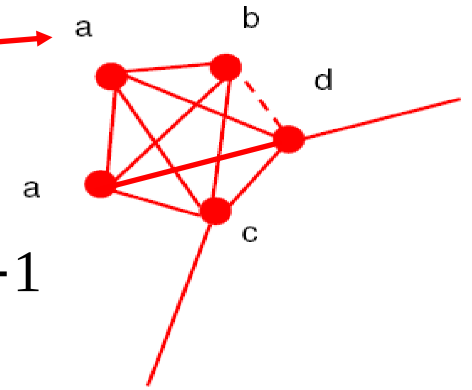
Donde
a, b c y d denotan distintos tipos de nodos

Es inmediato extenderlo a otros cliques



tendremos nodos del tipo

a)



tiene k vecinos

son $k-2$ Nodos de este tipo

$$n_l = k + 1$$

falta un nodo entre un par de sus vecinos (tener en cuenta que es un clique, todos conectados con todos)

— tomar en cuenta que tenemos $k+1$ nodos

— por rewiring hay 2 que dejan de ser del tipo **a** (b, d)

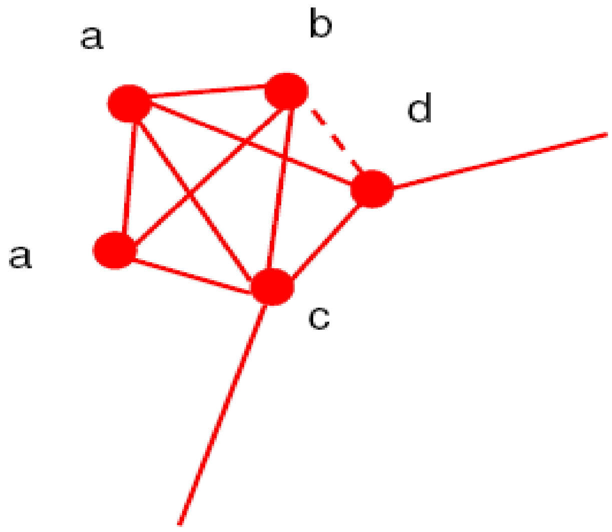
— por rewiring de otro clique hay uno que recibe un link y deja de ser del tipo **a** (c)

$$\boxed{n_a = k + 1 - 2 - 1 = k - 2}$$

Numero de nodos del tipo a

para cada uno de estos nodos el C_a es

$$\boxed{C_a = \frac{2}{k(k-1)}\left(\frac{k(k-1)}{2} - 1\right)}$$



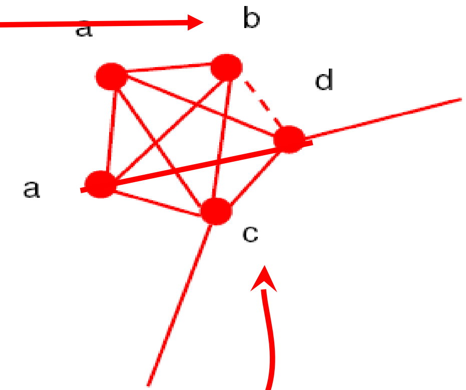
$$C_a = \frac{\frac{k(k-1)}{2} - 1}{\frac{k(k-1)}{2}}$$

para cada uno de estos nodos el C_a es

$$C_a = \frac{2}{k(k-1)}\left(\frac{k(k-1)}{2} - 1\right)$$

Pues por ser cliques pasan a perder 1 link

b)



- tiene $k_b = k - 1$ vecinos
- hay uno de estos unicamente
- sus vecinos estan totalmente conectados

$$\boxed{C_b = 1}$$

c)

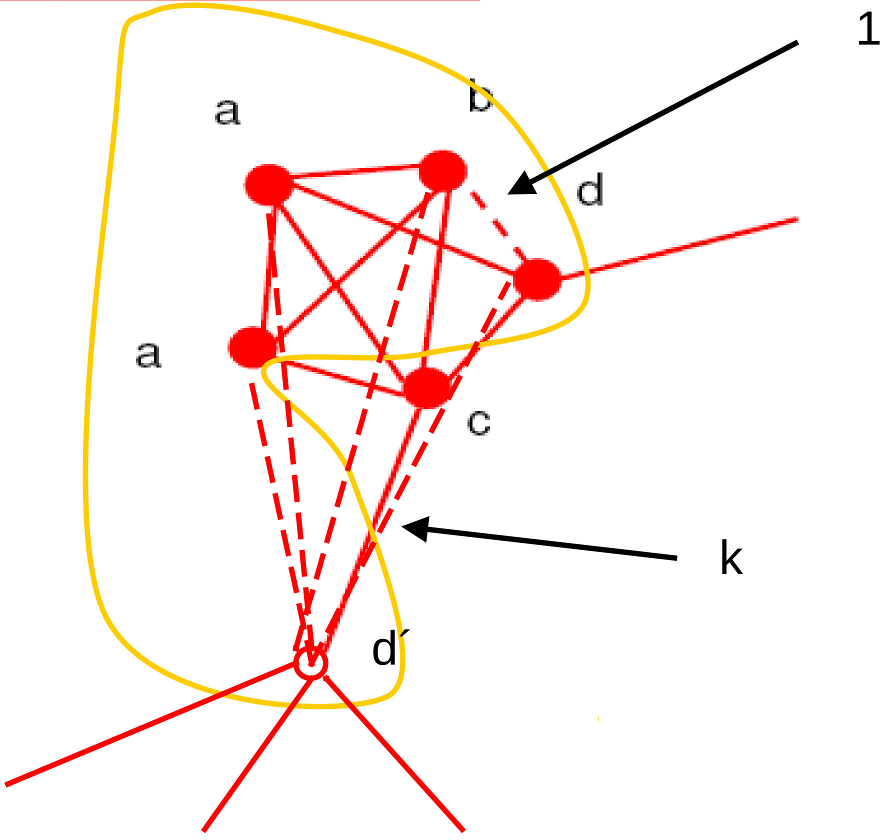
- tiene $k_c = k + 1$ vecinos (k del original y 1 del otro cluster)
- esta conectado a un nodo de otro ´exclique´ que sera del **tipo d**

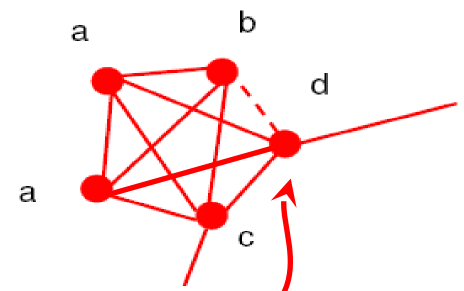
como este nodo no esta conectado con ningun otro nodo del clique original le faltaran k vecinos (de un total de k+1 nodos)

Falta ademas el links b-d

$$
\begin{aligned}
C_c &= \frac{2}{k(k+1)}\left(\frac{k(k+1)}{2} - (1+k)\right)\\
&= \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2} - 1\right)\\
&= 1 - \frac{2}{k}
\end{aligned}
$$

K+1 nodos





d)

tiene $k_d = k$ vecinos

esta conectado a un nodo del tipo c) de otro agrupamiento.

Luego le faltan $k-1$ links del vecindario

$$\boxed{\begin{aligned} C_d &= \frac{2}{k(k-1)}\left(\frac{k(k-1)}{2} - (k-1)\right) \\ &= \frac{2}{k}\left(\frac{k}{2} - 1\right) \\ &= 1 - \frac{2}{k} \end{aligned}}$$

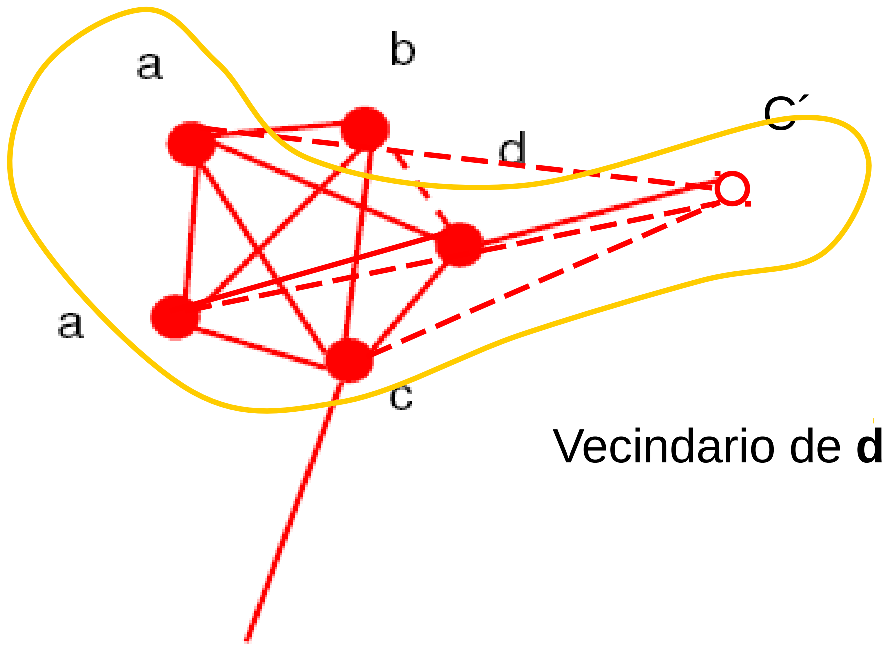
Tiene

k-1 del original

1 del nuevo

k-1 del nuevo
no ligados

Tipo d



Para calcular el coeficiente de Clusterizacion promediamos lo anterior sobre todos los vertices

$$\boxed{C = \frac{1}{k+1}((k-2)C_a + C_b + C_c + C_d)}$$

o sea

$$\left\{\begin{aligned}
C &= \frac{1}{k+1}\left[(k-2)\frac{2}{k(k-1)}\left(\frac{k(k-1)}{2}-1\right)+1+2\left(1-\frac{2}{k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\left[\frac{2}{k}\,\frac{\frac{1}{2}k(k-1)-1}{k-1}(k-2)-\frac{4}{k}+3\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\left[(k-2)\left(1-\frac{2}{k(k-1)}\right)+1+2\left(1-\frac{2}{k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\left[(k-2)-\frac{(k-2)2}{k(k-1)}+1+2-\frac{4}{k}\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\left[(k+1)-\frac{(k-2)2k}{k(k-1)k}-\frac{4k(k-1)}{k(k-1)k}\right] \\
&= \frac{1}{k+1}\left[(k+1)-\frac{(k-2)2k-4k(k-1)}{k(k-1)k}\right]
\end{aligned}\right.$$

$$C = \frac{1}{k+1}((k-2)C_a + C_b + C_c + C_d)$$

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \frac{1}{k+1}\left[(k+1) - \frac{2}{k-1}\right] \\ &= 1 - \frac{2}{k^2-1} \end{aligned}}$$

Se introducen entonces algunas magnitudes interesantes

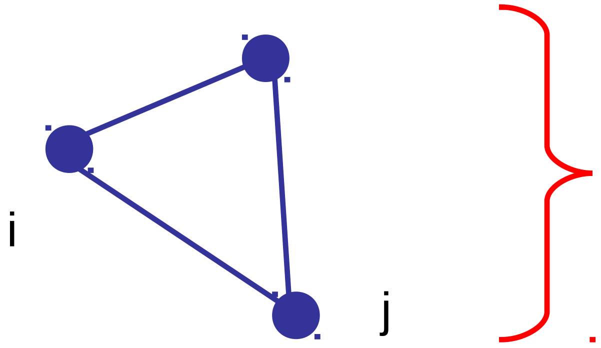
Grado local efectivo: k_{local}

es el numero promedio de links por nodo que tienen un $rango = 2$

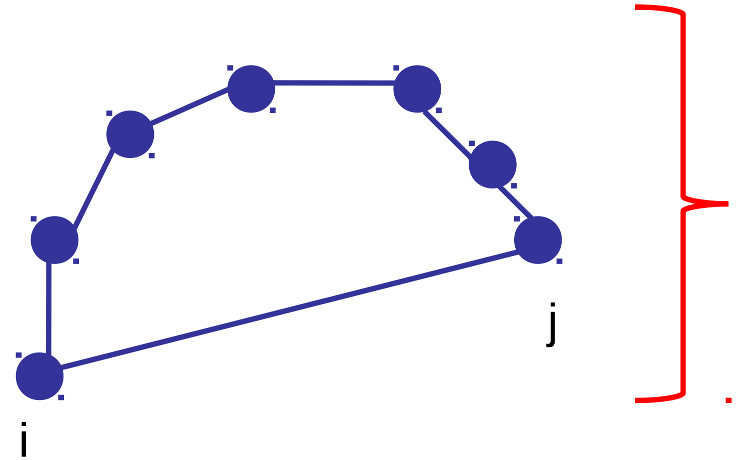
el rango de un link l_{ij} es la longitud del camino minimo que une i con j en ausencia de l_{ij}

es decir que los links locales son parte de un triangulo y no son shortcuts

Rango



Mínimo rango para
Singly connected



Rango 6

grado de clustering efectivo k_{clu}

Es el numero promedio de nodos a los que esta conectado un nodo que pertenece al vecindario del nodo v.

De esta forma

$$\boxed{\begin{aligned} C &= \frac{2}{k(k-1)} \frac{k_{loc}(k_{clu}-1)}{2} \\ &= \frac{k_{loc}(k_{clu}-1)}{k(k-1)} \end{aligned}}$$

Camino minimo para los cavemen

recordemos que cada cluster es casi un clique

introducimos dos distancias

d_{local} = distancia media entre dos nodos del mismo cluster

d_{global} = distancia media entre dos nodos de clusters diferentes

introducimos dos escalas

l_{local}

l_{global}

Para los locales tenemos

a) todos los nodos menos 2 estan a distancia 1

b) los otros nodos estan a distancia 2

Entonces (recordando que k es el grado)

$$d_{local} = l_{local} = \frac{2}{(k+1)k}\left[\left(\frac{(k+1)k}{2} - 2\right)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot\right]$$

$$= 1 - \frac{4}{(k+1)k} + \frac{8}{(k+1)k}$$

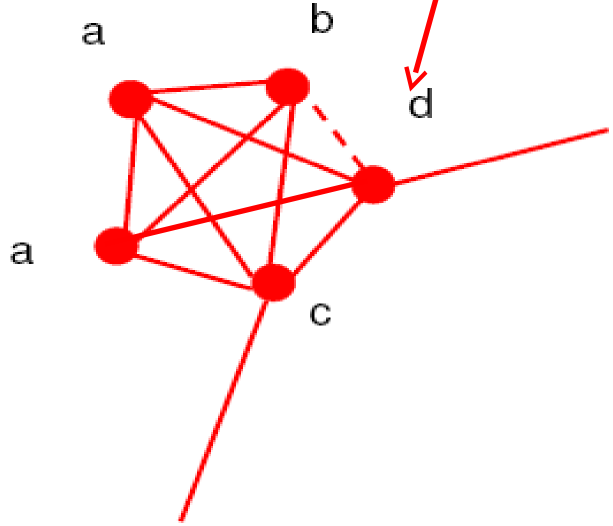
$$\boxed{= 1 + \frac{4}{(k+1)k}}$$

a) todos los nodos menos 2 estan a distancia 1

b) los otros nodos estan a distancia 2

Entonces (recordando que k es el grado)

$$d_{local} = l_{local} = \frac{2}{(k+1)k}\left[\left(\frac{(k+1)k}{2} - 2\right)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot\right]$$



$$d_{local} = 1 + \frac{4}{(k+1)k}$$

Cuando k es muy grande $\Rightarrow \rightarrow 1$

Sea ahora cada cluster un meta-nodo con su propia longitud local o sea que lo vemos como un anillo.

El anillo se resuelve teniendo en cuenta que

a) con n nodos

b) con k links por nodo

c) que tenemos que calcular hasta la mitad y multiplicar por 2 d)

e) que las distancias

$1,\ldots\ldots,1$	$2,\ldots\ldots,2$	$\ldots \quad \ldots$	n/k
$1\ldots k$	$k+1,\ldots,2k$	$\ldots \quad \ldots$	$(\frac{n}{k}-k+1),\ldots,\frac{n}{k}$

Para un anillo con $k \geqslant 2$ y k par

Para graphos WS

$$\begin{cases} L = \dfrac{n(n+k-2)}{2k(n-1)} \\[2ex] C = \dfrac{3}{4}\dfrac{(k-2)}{(k-1)} \end{cases}$$

Para el caso en consideracion

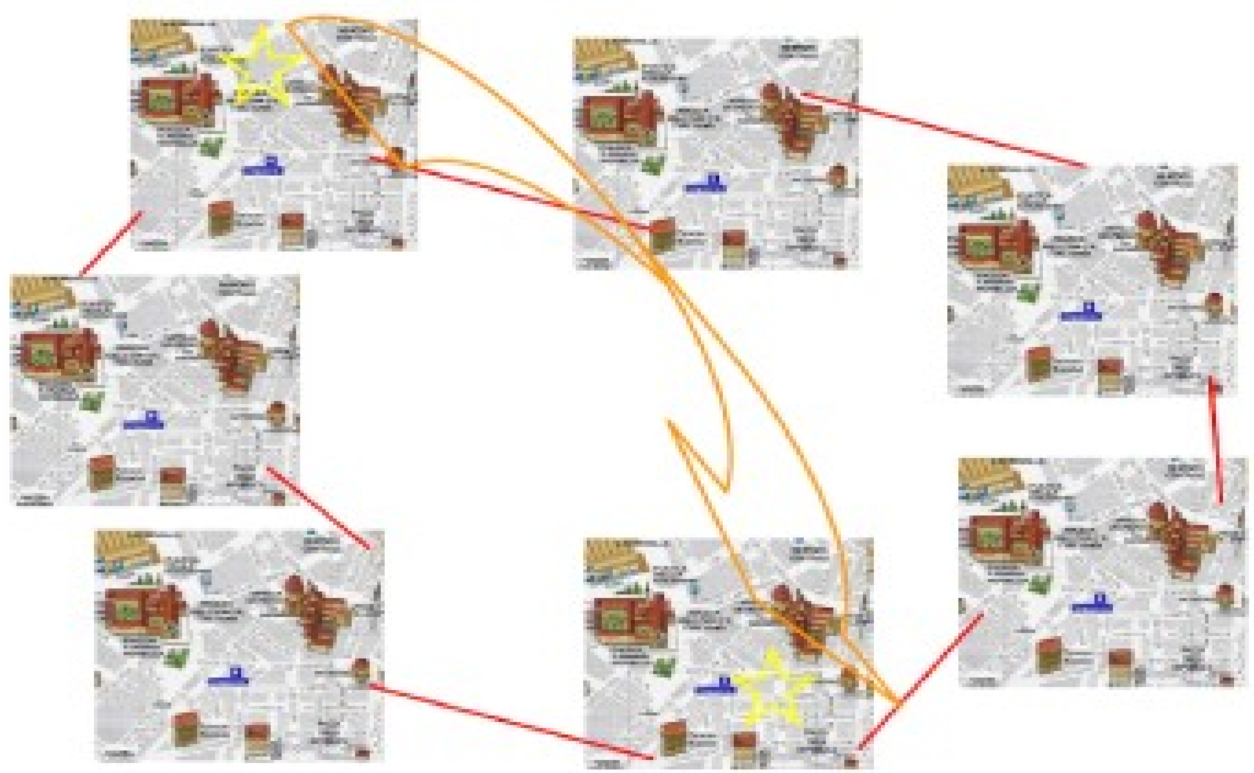
$$n_{global} = \frac{n}{k+1}$$

luego

$$\boxed{L_{global}\left(\frac{n}{k+1}\right) = \left(\frac{n}{k+1}\right)^2 \frac{1}{4}\left(\frac{n}{k-1} - 1\right)^{-1}}$$

Como es el camino entre un nodo v de un cluster y un nodo u de otro cluster en valor medio.

Sea una configuracion de grafo construido por



Los pasos a dar son:

a) cantidad de links a recorrer para salir del grafo en que me encuentro

$$\boxed{(L_{local})}$$

b) el numero de links para recorrer los clusters que deba cruzar

(Son 2 links por cluster, uno local y uno global en valor medio sera

$$\boxed{2(L_{global} - 1))}$$

c) numero de links para llegar al grafo final y al punto de interes en el grafo final

$$\boxed{1 + L_{local}}$$

$$\boxed{d_{global} = L_{local} + 2(L_{global} - 1) + 1 + L_{local}}$$

$$= \frac{8}{k(k+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{k+1}\right)^2\left(\frac{n}{k-1} - 1\right)^{-1} + 1$$

si $n \gg k \gg 1$

$$\boxed{d_{global} \approx \frac{n}{2(k+1)}}$$

El numero de pares de nodos en los clusters es

$$N_{local} = \frac{k(k+1)}{2}\frac{n}{(k+1)} = \frac{nk}{2}$$

y el numero de pares entre nodos que pertenecen a clusters distintos

$$N_{global} = \frac{1}{2}\frac{n}{(k+1)}\left(\frac{n}{(k+1)} - 1\right)(k+1)^2 = \frac{n(n-k-1)}{2}$$

De donde la distancia media entre todos los pares de nodos en el grafo es:

$$\boxed{\begin{aligned} L_{cc} &= \frac{1}{N}[N_{local} \cdot d_{local} + N_{global} \cdot d_{global}] \\ &= \frac{2}{n(n-1)}\left[\frac{nk}{2} \cdot 1 + \frac{n(n-k-1)}{2} \cdot \frac{n}{2(k+1)}\right] \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} L_{cc} &= \frac{k}{n-1} + \frac{n(n-k-1)}{2(k+1)(n-1)} \\ &\approx \frac{n}{2(k+1)} \end{aligned}}$$

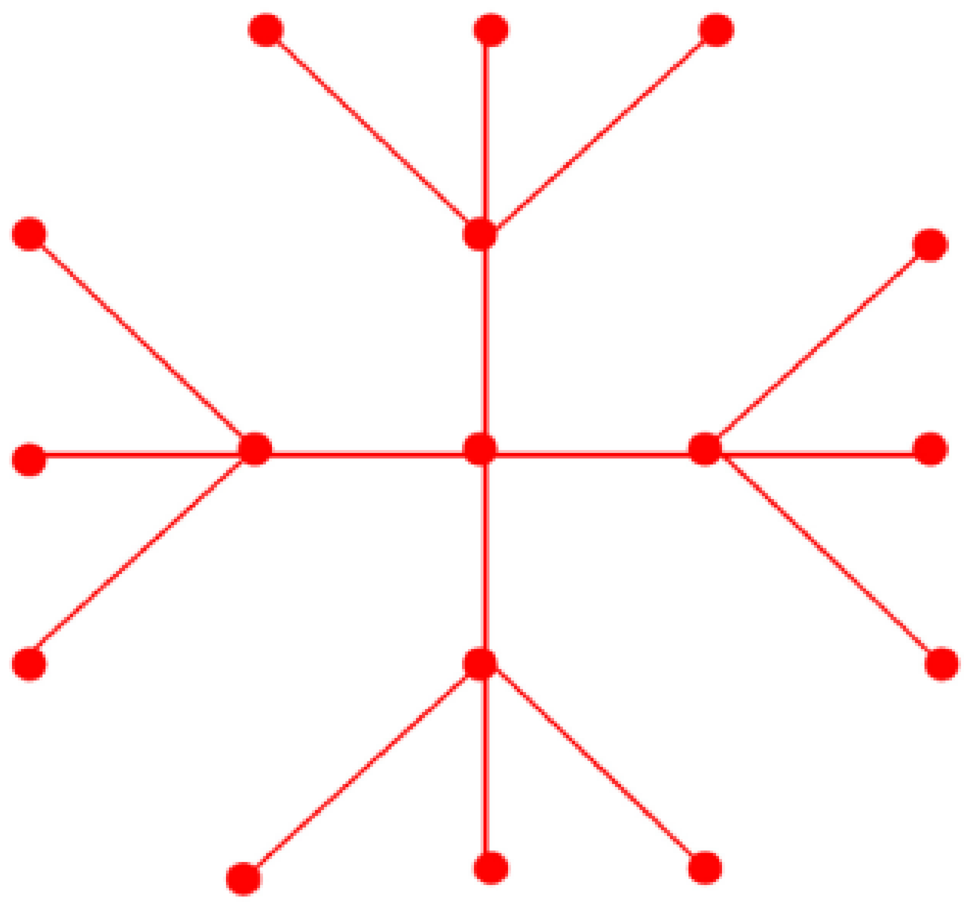
Similar a1lattice con n nodos de grado k o sea que es dominado por

d_{global}

$$d_{global} \approx \frac{n}{2(k+1)}$$

Sea ahora el Bether Lattice

Bethe lattice
Cayley tree
Moore graph



Longitud caracteristica

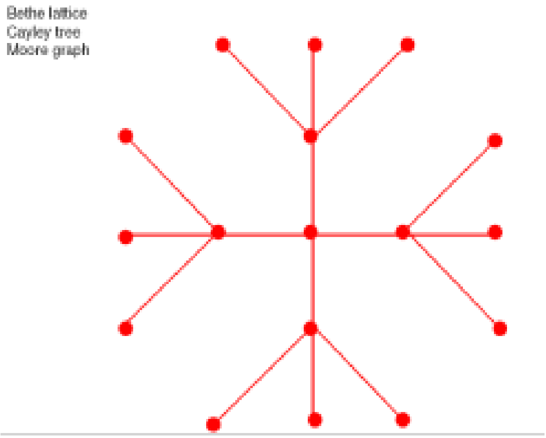
Como ya vimos para percolacion....

a medida que nos alejamos del origen (? no hay origen!)

k (el grado) es el z de percolacion (coordinacion)

cuando doy d pasos puedo llegar a

$$k(k-1)^{d-1}$$



Sea D la mayor distancia en el grafo

$$\boxed{S = \sum_{d=1}^{D-1} k(k-1)^{d-1}}$$

$$\sum_i L_{v,i} = \underbrace{\sum_{d=1}^{D-1} d \cdot k(k-1)^{d-1}}_{\text{Los S (hasta D-1)}} + \underbrace{(n-S-1) \cdot D}_{\text{Los a D}}$$

El -1 surge de excluir el nodo central v.

Si ahora promediamos sobre los $n-1$ nodos y usando que v es el mismo para todos los nodos

$$L_M = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{d=1}^{D-1} d \cdot k(k-1)^{d-1} + (n-S-1) \cdot D\right]$$

Pero $\sum_1^l r^{i-1} = (r^l - 1)/(r - 1)$

ademas $\partial_r(r^{i-1}) = (i-1)\, r^{i-2} \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{I} i \cdot r^{i-1} = \frac{nr^{I+1} - (I+1)r^{I} + 1}{(r-1)^{2}}}$$

para $r \neq 2$

Para $k > 2$

$$\boxed{L_M = \frac{1}{n-1}\left(\begin{array}{c} k\left[\dfrac{(D-1)(k-1)^{D} - D(k-1)^{D} + 1}{(k-2)^{2}}\right] + \\ +D\left[n - \dfrac{(k-1)^{D-1} - 1}{k-2} - 1\right] \end{array}\right)}$$

Para un anillo con $k \geqslant 2$ y k par

$$L = \frac{n(n+k-2)}{2k(n-1)}$$

Para $k = 2$ el bethe se hace un anillo

$$L_M = \frac{n^2}{4(n-1)}$$

La clusterizacion es

$$C = 0$$

Para un random graph regular

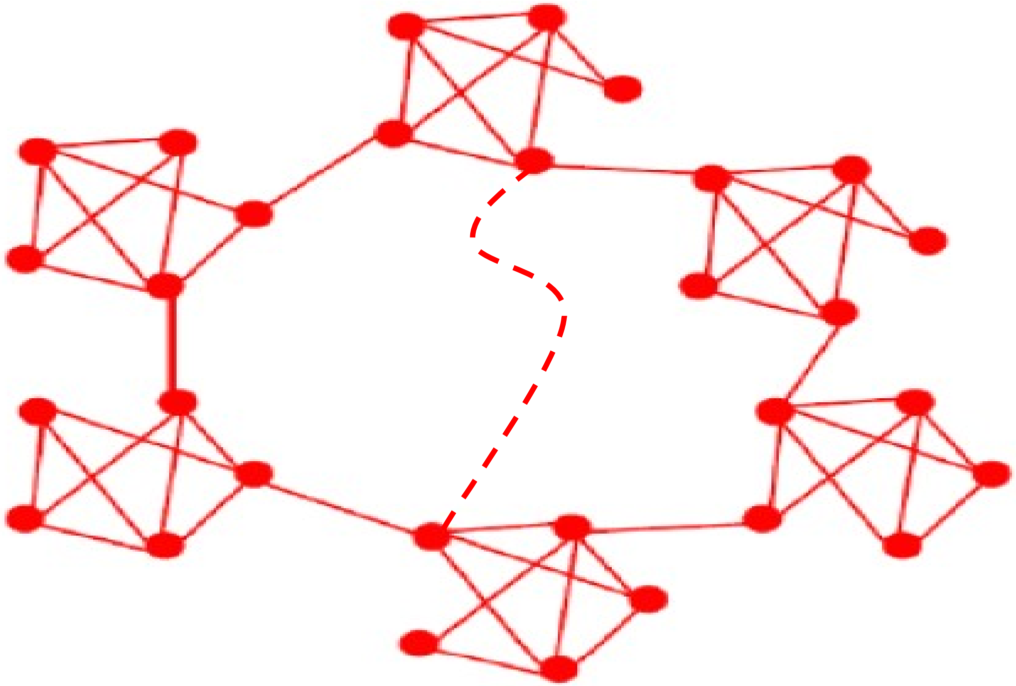
$$C_{\mathrm{random}} = \frac{k-1}{n}$$

luego con n muy grande....

Que pasa si hay rewiring?

Al estudiar al cavernario aparecen dos escalas, la local,asociada a los clusters y la global asociado al anillo de clusters.

Como se modifica la imagen si agregamos atajos?



la presencia de un link atajo asociado a un proceso de rewiring hace que:

L_{local} crece, porque sacamos un link del cluster

L_{global} decrece

El camino carateristico viene regulado por d_{global} (distancia promedio entre nodos de distintos clusters)

En estas condiciones para estructuras no del cavernario las cosas seran diferentes vimos que

$$\boxed{d_{global} = L_{local} + 2(L_{global} - 1) + 1 + L_{local}}$$

ahora para poder tomar en cuenta que no es un cavernario con $L \approx d_{global}$

$$\boxed{L = L_{local} + (1 + L_{local})(L_{global} - 1) + 1 + L_{local}}$$

donde hemos reempalzado $2 \rightarrow (1 + L_{local})$

Resulta que ahora debemos ver cuanto valen los L cuando hago el rewiring

Cuando no tengo atajos en el problema del cavernario tenermos

$$k_{local} = k - \frac{2}{k+1}$$

pues

$$n_l = k + 1$$

$$k_t = k(k+1) - 2$$

$$k_{local} = \frac{k_t}{n_l} = \frac{k(k+1)-2}{k+1}$$

falta un 2?

ademas

$$n_{loc} = k + 1$$

$$n_{glob} = \frac{n}{k+1}$$

Sea ahora el proceso de rewiring representado por un parametro ς tal que indica el ritmo al que los links locales son convertidos en links globales

$$k_{loc} = (1 - \varsigma)\left(k - \frac{2}{k+1}\right)$$

$$n_{loc} = k + 1$$

$$k_{glob} = 2(1 - \varsigma) + (k(k+1)\varsigma)$$

$$n_{glob} = \frac{n}{k+1}$$

Lo cual da lugar a una expresion complicada en la que se expresa todo en terminos del L_M (moore) de la forma

$$L_r = L_M(n_{loc}, k_{loc}) + L_M(n_{glo}, k_{glo}) \cdot [L_M(n_{loc}, k_{loc}) + 1]$$

reemplazando y calculando en $\varsigma = 0$ se recupera el cavernario (pero es una expresioin demasiado aproximada)