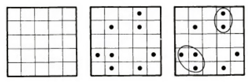
Percolacion
1D

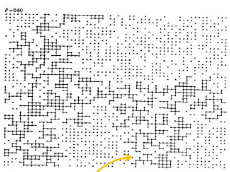
Percolacion

Cuestiones generales:

Ejemplos
- Anecdota de la mascara de gas
- Observable→Clusters

a) Que es un cluster?





b) tipos de percolacion
- nodos
- links
- nodos-links

Una dimension

Primero vemos el proceso de percolacion de nodos, en una dimension.

Definimos el proceso : dada una grid unidimensional, para cada nodo lo poblamos con una probabilidad p luego cada nodo quedara vacio con porbabilidad $(1-p)$

son independientes⇒ un nodo ocupado no genera correlacion sobre ningun otro.

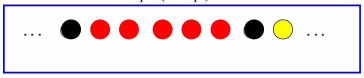
La proba de que dos nodos contiguos esten poblados es

$$\boxed{p \cdot p = p^2}$$

Que es un cluster en una dimension?

Es un conjunto de nodos vecinos inmediatos ocupados con 2 nodos extremales vacios, luego la proba de un cluster de tamaño s:

$$p^s(1-p)^2$$



Definiciones arbitrarias:

Perimetro de un cluster : los nodos vacios que lo limitan.

Los 2 nodos vacios forman el perimetro t en este caso los clusters tienen un unico perimetro

La superficie : son los nodos del cluster vecinos inmediatos al perimetro. Sera 2 para clusters unidimensionales de tamaño mayor que 1

El "bulk" son los nodos del cluster que no forman la superficie.

$$\ldots\ P\ S\ \underbrace{B\ B\ B}_{\text{Bulk}}\ S\ P\ \bigcirc\ \ldots$$

Otras propiedades

Sea la longitud de la grid L (L nodos)

Pensamos en $L \to \infty$ para evitar los problemas de borde.

Para ver cuantos clusters de tamaño s hay en una grid pensamos que cada nodo puede ser el extermo izquierdo del un cluster (como colocar un... de logitud s).

La probabilidad de que ese nodo sea el extremo izquierdo del cluster es que tenga uno vacio a izquierda, que este ocupado, que luego vengan $(s-1)$ ocupados y luego uno vacio.

Como todo punto tiene una probabilidad $p^s(1-p)^2$de ser por ejemplo el extremo izquierdo del cluster entonces

$$\boxed{N_s = Lp^s(1-p)^2}$$

(Numero medio)

Pero como esto diverge para todo s elegimos el numero medio de clusters de tamaño s por nodo

$$\boxed{n_s = p^s(1-p)^2} \quad \left\{ n_s = \frac{N_s}{L} \right.$$

En un problema unidimensional para que exista percolacion necesitamos NO TENER nodos vacios. Si $p < 1$ la proba de tener

Si p<1 la probabilidad de tener un nodo vacio es $(1-p)$ luego el numero de nodos vacios es $\sim L(1-p)$ o sea que tenemos muchos nodos vacios, luego en este caso nunca percola.

Entonces el pasaje de no percolar a percolar ocurre en $p = 1 \Rightarrow p_c = 1$, pero no hay nada por encima de $p = 1$!!!!!

La proba de que un nodo pertenezca a un cluster de tamaño s es

$$p^s(1-p)^2 s = n_s s$$

(pues puede ocupar cualesquiera posicion)

La proba de que este ocupado es igual a la proba de que pertenezca a un cluster

pertenezca a un cluster de tamaño > 1, entonces (con $p < p_c$)

$$\boxed{\sum_s p^s(1-p)^2 s = \sum_s n_s s = \text{debe ser igual a } p}$$

(para mas dimensiones p_c es menor que 1 , entonces habria un problema para $s \to \infty$)

Otro modo de verlo es haciendo la cuenta $(p < 1)$

$$\sum p^s(1-p)^2 s = (1-p)^2 p \sum \frac{\partial}{\partial p} p^s =$$
$$(1-p)^2 p \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{1-p}\right] =$$

$$\boxed{= p}$$

Tamaño medio de los clusters

Tomamos un nodo ocupado al azar, queremos saber la proba de que pertenezca a un cluster finito

la proba de pertenecer a un cluster de tamaño s es

$\boxed{n_s s}$ { n_s es el numero de clusters por nodo; $Ln_s s =$ Numero de nodos en clusters de tamaño s }

la proba de que pertenezca a un cluster es de cualquier tamaño

$$\boxed{\sum n_s s} \qquad \#$$

Entonces la proba de que un nodo ocupado pertenezca a un $s\_cluster$ es

$$\boxed{\omega_s = \frac{n_s s}{\sum n_s s}} \qquad \#$$

$L\sum_s n_s s =$ Numero total de nodos en clusters de cualesquiera size

otro modo de verlo

\# nodos en clusters de tamaño s es $Ln_s s$

\# de nodos en clusters es $L\sum n_s s$

$$\boxed{\text{proba es } = \frac{Ln_s s}{L\sum n_s s} = \frac{n_s s}{\sum n_s s}}$$

Calculamos el tamaño medio de los clusters, $S = \langle s \rangle$

$$S = \sum_s \omega_s s = \sum \frac{n_s s}{\sum n_s s} s = \sum \frac{n_s s^2}{\sum n_s s}$$
$$= \sum \frac{n_s s^2}{p} = \frac{1}{p}\sum n_s s^2$$

Observar que se mide a partir de tomar nodos ocupados

$$\boxed{S =} \quad \frac{1}{p}\sum n_s s^2 =$$

$$\frac{1}{p}(1-p)^2 \sum p^s s^2 =$$

$$\frac{1}{p}(1-p)^2 p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p} \sum p^s =$$

$$\frac{1}{p}(1-p)^2 p \frac{\partial}{\partial p} p \frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{p}{1-p}\right] =$$

$$(1-p)^2 \frac{\partial}{\partial p} p\left[\frac{1}{(1-p)^2}\right] =$$

$$= \frac{(1-p)+2p}{(1-p)}$$

$$= \boxed{\frac{(1+p)}{(1-p)}}$$

$\boxed{S \to \infty \text{ con } p \to 1}$

Probabilidad Critica

Sea $p_\infty(p)$ la probabilidad de que "fluido inyectado en un nodo moje infinitos nodos en el sistema"

Definimos entonces

$$\boxed{p_c = \sup\{p, / p_\infty(p) = 0\}}$$

Funcion de correlacion

Probabilidad de que un nodo a una distancia r de un nodo ocupado pertenezca al mismo cluster

Para que pertenezca al mismo cluster $\Rightarrow$ en cada paso debe estar ocupado, luego es (para r pasos) p^r, de este modo definimos

$$\boxed{g(r) = p^r = \exp\left[\frac{-r}{\xi}\right], \text{ con } \xi = -\frac{1}{\ln(p)}}$$

Si $p \simeq p_c = 1 \Rightarrow$

$$\ln(p) = \ln(1 + p - 1) = \ln(1 + (p - p_c))$$

$$= \ln(1 + x) \simeq x = \boxed{(p - p_c)}$$

$$\ln(1 + x) \simeq x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + O(x^5)$$

luego

$$\boxed{\xi = \frac{1}{(p_c - p)}}$$

ξ es la distancia de correlacion.

$$\sum g(r) = \sum_0^\infty p^r + \left[\sum_0^\infty p^r - 1\right]$$

$$= 1/(1-p) + [1/(1-p) - 1]$$

$$= \frac{2}{1-p} - 1 = \frac{2 - 1 + p}{1 - p}$$

$$= \frac{1+p}{1-p} = S$$

$\sum_0^\infty p^r$ = suma a derecha

$\left[\sum_0^\infty p^r - 1\right]$ = suma a izquierda sin contar el 0 dos veces.

Conclusiones

a) en p_c hay magnitudes que divergen y se pueden expresar como potencias de $(p_c - p)$ que es la distancia al punto critico

$$\boxed{\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{(p_c - p)} \\ S &= \frac{(p_c + p)}{(p_c - p)} \end{aligned}}$$

Este tipo de comportamiento tambien ocurre en fluidos

De una dimension a d dimensiones

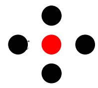
Supongamos que pasamos de 1 dimension a 2 dimensiones

Supongamos una red cuadrada, cada nodo tiene 4 vecinos inmediatos

En 2D

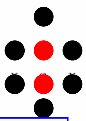
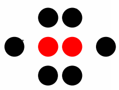
.

Para un cluster de tamaño 1



entonces $\boxed{n_1 = p(1-p)^4}$

Para un cluster de tamaño 2

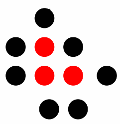
una posibilidad es  y otra posibilidad es 

entonces $\boxed{n_2 = 2p^2(1-p)^6}$

.

Para un cluster de tamaño 3

para el lineal es $\boxed{2p^3(1-p)^8 = 2p^s(1-p)^{2s+2}}$

pero tambien puede ser del tipo  para esta es

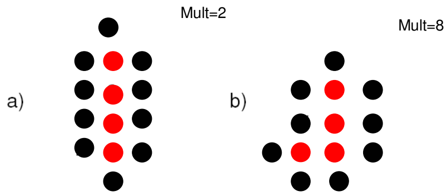
$4p^3(1-p)^7$

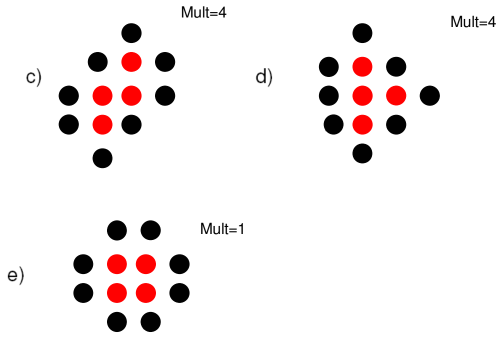
Luego $\boxed{n_3 = 2p^3(1-p)^8 + 4p^3(1-p)^7}$

.

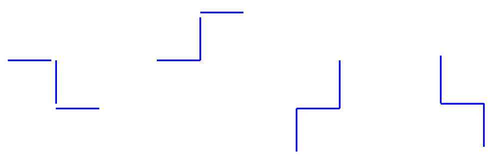
Para un cluster de tamaño 4

Para $s = 4$





con multiplicidades a)→ 2 , b) →8 , c)→ 4 , d) →4 ,e) →1



Lattice Animals

(Por alguna causa esto se llama "lattice animals")

En general escribimos

$$\boxed{n_s = \sum g_{st}\, p^s (1-p)^t}$$

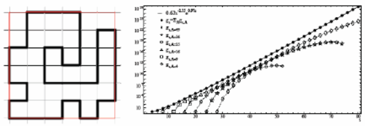
donde g_{st} es la multiplicidad para el tamaño s y el perimetro t.

Sea $g_s = \sum_t g_{st}$, que es el numero de fragmentos (animales) de tamaño s sin tomar en cuanta los distintos perimetros.

Se ha propuesto que la dependencia de g_s con s para animales grandes

$$\boxed{g_s \propto s^{-\theta} cte^s}$$

Analisis segun self-avoiding polygons



$$g_\phi = 0.62\phi^{-2.55}\exp(0.97\phi)$$

Un Ejemplo

De cómo aplicar estas ideas a un problema contemporáneo

Isoscaling

Isoscaling is the property that fragment yields of similar but isotopically different reactions have a exponential dependence on N and Z

$$R_{21}(Z,N) = \frac{Y_2(Z,N)}{Y_1(Z,N)}$$

$$R_{21}(Z,N) = C\exp(\alpha Z - \beta N)$$

$$\alpha T \approx 4\gamma\left(\frac{Z_1^2}{A_1^2} - \frac{Z_2^2}{A_2^2}\right)$$

Symmetry term

Some experimental results

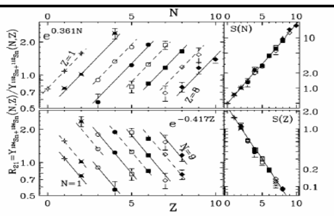


FIG. 1. Nuclei yield ratios are plotted as a function of N (top panels) and Z (bottom panels) for central $^{124}Sn+{}^{124}Sn$ and $^{112}Sn+{}^{112}Sn$ collisions at $E/A=50$ MeV. The lines in the upper left panel correspond to best fits of different elements with one common slope. Similarly, in the bottom left panel, the lines correspond to fits of the same isotones. In the top right panel, the scaled isotopic ratio, $S(N)$ [Eq. (2)] is constructed using $\beta=-0.417$. Similarly, in the bottom right panel, the scaled isotone ratio, $S(Z)$ defined in Eq. (3), is plotted as a function of Z using $\alpha=0.361$.

PHYSICAL REVIEW C, VOLUME 64, 041603(R)

Conditions for isoscaling in nuclear reactions

M. B. Tsang,[1] W. A. Friedman,[2] C. K. Gelbke,[1] W. G. Lynch,[1] G. Verde,[1] and H. S. Xu[1]
[1]*National Superconducting Cyclotron Laboratory and Department of Physics and Astronomy, Michigan State University, East Lansing, Michigan 48824*
[2]*Department of Physics, University of Wisconsin, Madison, Wisconsin 53706*

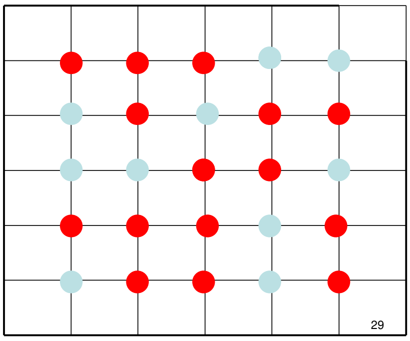
(Received 4 June 2001; published 4 September 2001)

Nuclear Percolation model

Populate all nodes according to

Prob. p

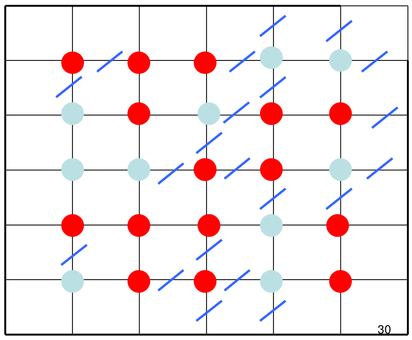
Prob. q=1-p



29

Nuclear Percolation model

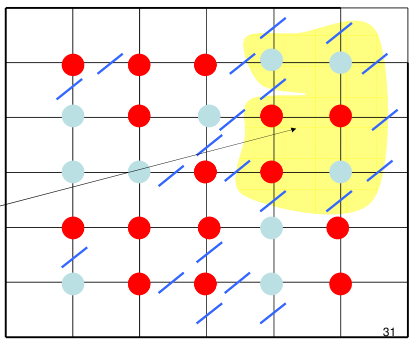
Break bonds with probability b



30

Nuclear Percolation model

Identify clusters

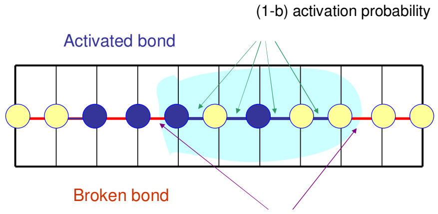


This cluster is Characterized by
A=6 nodes
N=3, Z=3
a=6 active bonds
t=11 broken bonds

31

One dimensional case, 2 colors

Given a linear chain



$N_A = (1-b)^{A-1} b^2 L$

$n_A = \lim_{L\to\infty}\left[\frac{N_A}{L}\right]$ → Number of clusters of size A per bond

For this case the cluster have a unique value of the perimeter t, t=2

32

N colors Percolation model in d dimensions

We address the problem of the analysis of the Relative yields from two lattices of sizes A_1 and A_2.

Each lattice fragments by bond breaking according to a probability b_i (b_1 and b_2)

The A_1 and the A_2 nodes are randomly assigned colors denoted by C_N,C_Z,C_Q,…with probabilities p_N , p_Z,p_Q ,…

The number of nodes with color C_N will be denoted by N .

N colors Percolation model in d dimensions

The coloring probabilities are normalized and independent.

(This is usually referred to as bond polychromatic Percolation)

We then calculate R_{21}(N,Z,Q,…)

Percolation model in d dimensions

If we only look at the size of the clusters without taking care about the colors, in the ∞ limit

Number of clusters of size A per node (d Dim.)

$$n_A = \lim_{L\to\infty} \frac{N_A}{L^d}$$

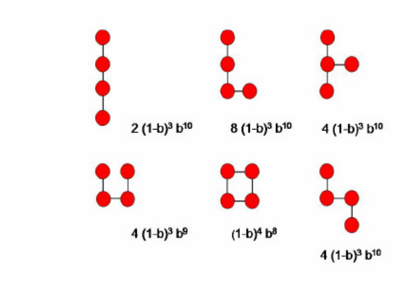
Which can be written as

$$n_A = \sum_{a,t} g_{Aat} (1-b)^a b^t$$

g_{Aat} is the number of ways of building a lattice animal of mass A , with a bonds and a perimeter t

Percolation model

Lattice animals in 2D with A=4 (square lattice)



$$n_4 = 18(1-b)^3 b^{10} + 4(1-b)^3 b^9 + (1-b)^4 b^8$$

N-colors Percolation model

We now include the color assignation

total mass A=Z+N+Q+P+……
1= p_Z + p_N + p_Q + …

Then
$$n_A = \left[\sum_{at} g_{Aat}(1-b)^a b^t\right]\left[\sum_{z=0,A} \alpha_z p_Z{}^Z p_N{}^N p_Q{}^Q \ldots\right]$$

Ojo con esta suma

$$\alpha_Z = A! / \left[A_N! A_Z! A_Q! \ldots\right]$$

then
$$\boxed{n_A(Z,N,Q,\ldots) = \left[\sum_{at} g_{Aat}(1-b)^a b^t\right]\alpha_z \left[p_Z{}^Z p_N{}^N p_Q{}^Q \ldots\right]}$$

N-colors Percolation model

g_isoscaling
$$R_{21} = \frac{Y_2(N,Z,Q,\ldots)}{Y_1(N,Z,Q,\ldots)} = \frac{n_A(N,Z,Q,\ldots)_2}{n_A(N,Z,Q,\ldots)_1}$$

$$\frac{n_A(Z,N,Q,\ldots)_2}{n_A(Z,N,Q,\ldots)_1} = \frac{\left[\sum_{at} g_{Aat}(1-b_2)^a b_2{}^t\right]\left[p_Z{}^Z p_N{}^N p_Q{}^Q \ldots\right]_2}{\left[\sum_{at} g_{Aat}(1-b_1)^a b_1{}^t\right]\left[p_Z{}^Z p_N{}^N p_Q{}^Q \ldots\right]_1}$$

If $b_1 = b_2$

$$\frac{n_A(Z,N,Q,\ldots)_2}{n_A(Z,N,Q,\ldots)_1} = \frac{\left[p_Z{}^Z p_N{}^N p_Q{}^Q \ldots\right]_2}{\left[p_Z{}^Z p_N{}^N p_Q{}^Q \ldots\right]_1}$$

N-colors Percolation model

then

$$R_{21}(N,Z,Q,\ldots) = \frac{p_{Z2}^Z p_{N2}^N p_{Q2}^Q \cdots}{p_{Z1}^Z p_{N1}^N p_{Q1}^Q \cdots} = \left(\frac{p_{Z2}}{p_{Z1}}\right)^Z \left(\frac{p_{N2}}{p_{N1}}\right)^N \left(\frac{p_{Q2}}{p_{Q1}}\right)^Q \cdots$$

$$R_{21}(N,Z,Q,\ldots) = \exp\left[N\ln\left(\frac{p_{N2}}{p_{N1}}\right) + Z\ln\left(\frac{p_{Z2}}{p_{Z1}}\right) + P\ln\left(\frac{p_{Q2}}{p_{Q1}}\right) + \ldots\right]$$

$$= \exp(\alpha N + \beta Z + \gamma Q + \ldots)$$

with
$$\alpha = \ln\left(\frac{p_{N2}}{p_{N1}}\right) \quad \beta = \ln\left(\frac{p_{Z2}}{p_{Z1}}\right) \quad \gamma = \ln\left(\frac{p_{Q2}}{p_{Q1}}\right)$$

Nuclear Percolation model

We now work with two colors □"isospin" degree of freedom

$$n_A = \left[\sum_{at} g_{Aat}(1-b)^a b^t\right]\left[\sum_{z=0,A} \alpha_z p^Z (1-p)^{(A-Z)}\right]$$

with $\alpha_Z = A!/N!Z!$

then $n_A(Z) = \left[\sum_{at} g_{Aat}(1-b)^a b^t\right]\alpha_z p^Z (1-p)^{(A-Z)}$

Isoscaling
$$R_{21} = \frac{Y_2(N,Z)}{Y_1(N,Z)} = \frac{n_A(Z)_2}{n_A(Z)_1}$$

Nuclear Percolation model

then

$$R_{21}(N,Z) = \frac{p_2^Z q_2^N}{p_1^Z q_1^N} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^Z \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^N$$

$$R_{21}(N,Z) = \exp\left[N \ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right) + Z \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)\right] = \exp(\alpha N + \beta Z)$$

with

$$\alpha = \ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \qquad \beta = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

Nuclear Percolation model

Finite systems

We now approximate R_{21} for finite systems as :

$$R_{21}(N,Z) = \frac{N_A(Z)_2}{N_A(Z)_1} \approx \frac{A_2 n_A(Z)_2}{A_1 n_A(Z)_1}$$

Using Z_t , the number of protons

$$= \frac{A_2}{Z_t}\frac{Z_t}{A_1}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^Z \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^N \approx \frac{p_1}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^Z \left(\frac{q_2}{q_1}\right)^N$$

Which renders

$$R_{21}(N,Z) = C \exp(\alpha N + \beta Z)$$

$$\alpha = \ln\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \qquad \beta = \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right)$$

$$C = A_2 / A_1 \approx p_1 / p_2$$

Nuclear Percolation model

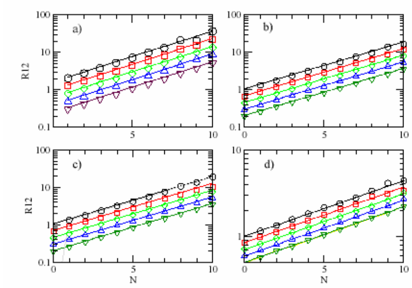
a) A_2= 7x7x7 , A1=6x6x6, Z=108

b) A=6x6x6 p_1=0.5, p_2=0.33

c) Same as b), with A=5x5x5

d) A=6x6x6 p1=0.5, p2=0.42

No fits



Nuclear Percolation model (2D)

Lattice animals

$g_{Aat}(1-b)^a b^t$ for 2D square Lattice up to A=6

$$A=1 \to b^4$$

$$A=2 \to 2(1-b)b^6$$

$$A=3 \to 2(1-b)^2 b^8 + 8(1-b)^2 b^8$$

$$A=4 \to 18(1-b)^3 b^{10} + (1-b)^4 b^8 + 4(1-b)^3 b^9$$

$$A=5 \to 55(1-b)^4 b^{12} + 8(1-b)^5 b^{10} + 24(1-b)^4 b^{11}$$

$$A=6 \to 174(1-b)^5 b^{14} + 40(1-b)^6 b^{12} + 2(1-b)^7 b^{10} + \\ +144(1-b)^5 b^{13} + 30(1-b)^5 b^{12} + 14(1-b)^6 b^{11}$$

Nuclear Percolation model

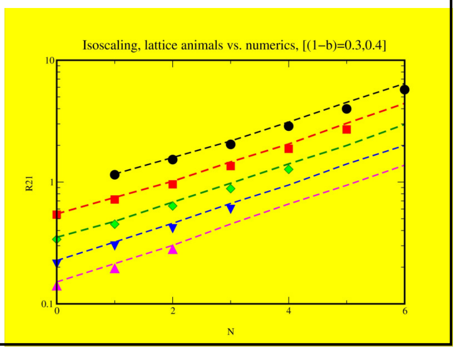
$b_2 \neq b_1$

$$\frac{(N_{A=5,N})_2}{(N_{A=5,N})_1} = \left[\frac{55(1-b_2)^4 b_2^{12} + 8(1-b_2)^5 b_2^{10} + 24(1-b_2)^3 b_2^{11}}{55(1-b_1)^4 b_1^{12} + 8(1-b_1)^5 b_1^{10} + 24(1-b_1)^3 b_1^{11}}\right]\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(A-N)}\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^{N}\right]\left[\frac{p_1}{p_2}\right]$$

Nuclear Percolation model

Simulation and lattice animals

$b_2=0.6$
$b_1=0.7$



Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
PHYSICA A
Physica A 374 (2007) 663–668
www.elsevier.com/locate/physa

Geometrical aspects of isoscaling

A. Dávila[a], C.R. Escudero[a], J.A. López[a,*], C.O. Dorso[b]
[a]Department of Physics, University of Texas at El Paso, El Paso, TX 79968, USA
[b]Departamento de Física-Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón 1 Ciudad Universitaria, 1428 Buenos Aires, Argentina

Received 14 December 2005
Available online 25 September 2006

PHYSICAL REVIEW C 77, 037603 (2008)

Symmetry entropy and isoscaling

L. G. Moretto,[1] C. O. Dorso,[2] J. B. Elliott,[1] and L. Phair[1]
[1]Nuclear Science Division, Lawrence Berkeley Laboratory, Berkeley, California 94720, USA
[2]Departamento de Física, FCEN, Universidad de Buenos Aires, Núñez, Argentina

(Received 8 September 2007; published 12 March 2008)

PHYSICAL REVIEW C 78, 034613 (2008)

Isoscaling and the high-temperature limit

C. O. Dorso,[1] C. M. Hernández,[2] J. A. López,[3] and J. A. Muñoz[3]
[1]Universidad de Buenos Aires, Nuñez, Argentina
[2]Universidad de Colima, Colima, México
[3]University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

(Received 22 July 2008; published 30 September 2008)

PHYSICAL REVIEW C 73, 044601 (2006)

Dynamical aspects of isoscaling

C. O. Dorso,[1] C. R. Escudero,[2] M. Ison,[1] and J. A. López[2]
[1]Departamento de Física, FCEN, Universidad de Buenos Aires, Núñez, Argentina
[2]Department of Physics, University of Texas at El Paso, El Paso, Texas 79968, USA

(Received 11 April 2005; revised manuscript received 27 January 2006; published 3 April 2006)

PHYSICAL REVIEW C 73, 034605 (2006)

Isoscaling: Geometry, correlations and symmetry energy

C. O. Dorso
Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires, Pabellón I, Ciudad Universitaria, Nuñez, 1428, Buenos Aires, Argentina

(Received 12 December 2005; published 15 March 2006)