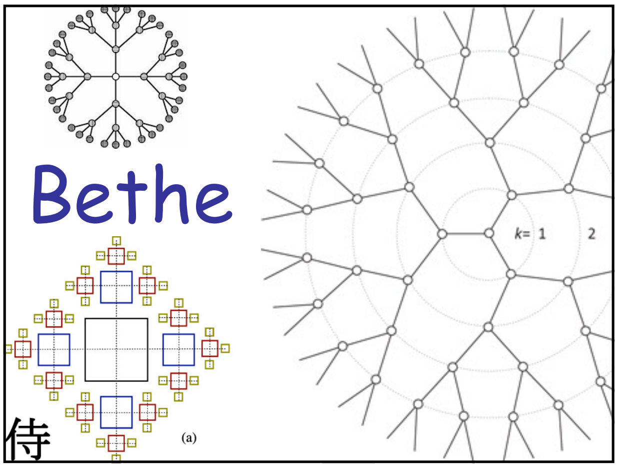
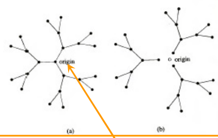


La red de Bethe

de cada nodo salen z uniones, se llama *coordination number* .

El grafico para $z = 3$.



todo nodo es origen!

Cual es la dimension "efectiva" de una red de bethe?

Relacion Area-Volumen

Sea una esfera en d dimensiones, el volumen es proporcional a

$$V \propto r^d \Rightarrow r \propto V^{1/d}$$ #

El area de la esfera es proporcional a r^{d-1} , entonces

$$A \propto r^{d-1} \Rightarrow A \propto V^{(d-1)/d} = V^{(1-1/d)}$$

de donde

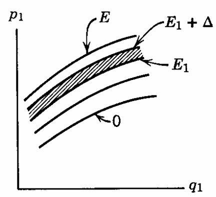
si $d \rightarrow \infty \Rightarrow A \propto V$

Recordar que para la entropia de Boltzmann

$$S = k \log \Gamma = k \log \Sigma$$

con $\left[\Gamma = \iint\limits_{E<H<E+\Delta} d^{3N}q d^{3N}p \right]$ y $\left[\Sigma = \iint\limits_{H<E+\Delta} d^{3N}q d^{3N}p \right]$

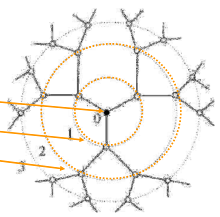
$$N \sim 10^{23}$$



H=H(p,q)

Para la red de Bethe V es la masa o numero de nodos. Si empezamos desde algun nodo (cualesquiera es siempre el central) tenemos que

nodo		masa
central	→	1
capa 1	→	z
capa 2	→	$z(z-1)$
capa 3	→	$z(z-1)^2$
capa 4	→	$z(z-1)^3$
capa ...	→	$\dots$



Entonces la masa o volumen es

$$\boxed{V = 1 + \sum_{n=0}^{m} z(z-1)^n = \begin{cases} -\frac{z}{z-2} + z\frac{(z-1)^{m+1}}{z-2} + 1 & \text{si } z \neq 2 \\ 2m+3 & \text{si } z = 2 \end{cases}}$$

"origen" n=0 es la primer capa

Donde el 1 corresponde al nodo central y se suma sobre las

capas

Recordemos que $n = 0$ corresponde a $r = 1$ (o sea con la primer capa)

Entonces para $z = 3$

$$V = -3 + 3\frac{(2)^{m+1}}{1} + 1 = 3(2^r) - 2$$

El area seria el conjunto de nodos en la ultima capa $\Rightarrow$

$$\boxed{A = z(z-1)^{r-1} = 3(2^{r-1})}$$

Cuando r es muy grande tenemos

$$\boxed{V \sim 3(2^r) = \ \mathbf{2A}}$$

o sea que se comporta como el caso de $d = \infty$

$$V = -3 + 3\frac{(2)^{m+1}}{1} + 1 = 3(2^r) - 2$$

En general planteando V/A (Maple)

$$\boxed{V/A = \frac{-\frac{z}{z-2} + z\frac{(z-1)^r}{z-2} + 1}{z(z-1)^{r-1}} = \left[\tfrac{1}{z}(z(z-1)^r)(z-1)^{1-r}\right]/(z-2)}$$

obtenemos :

$$\boxed{\frac{\left[\tfrac{1}{z}(z(z-1)^r)(z-1)^{1-r}\right]}{(z-2)} \to \frac{(z-1)}{(z-2)} = V/A}$$

que es una constante.

Por la proba de un loop

Consideremos una red cuadrada bidimensional sobre la que se desarrolla una caminata al azar que es self-avoiding.

Pensemos en el loop mas pequeño (4 pasos)

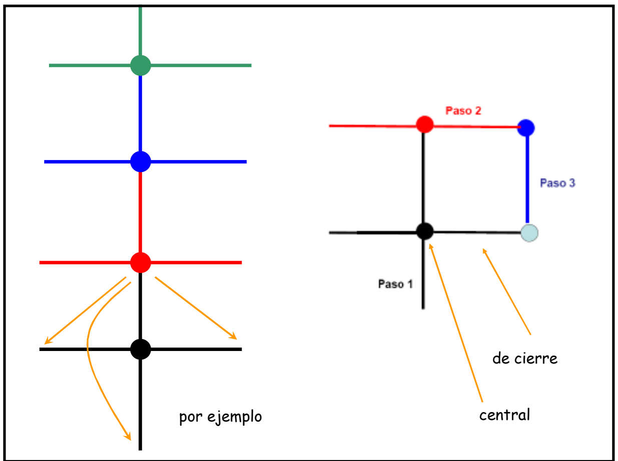
El numero de "estructuras", abiertas o no, al colocar es:

Entonces

-Si es bidimensional para el primerpaso tengo 4 opciones	$2d$
-para los siguientes tengo 3 en cada caso (no puedo volver)	$2d-1$
-para el siguiente tengo 3 en cada caso	$2d-1$

Cuantos dan loop? $\longrightarrow$ para obtener loop:

-Si es bidimensional para el primer paso tengo 4 opciones	$2d$
-para los siguientes tengo 2 en cada caso	$2d-2$
-para el siguiente tengo 1 en cada caso	1



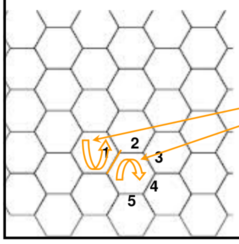
un poco mas elegante

Entonces

-Si es bidimensional para el primerpaso tengo 4 opciones	z
-para los siguientes tengo en cada caso (no puedo volver)	z -1
-para el siguiente tengo en cada caso	z -1

....

esto depende de la red sustrato donde pueda desarrollar la red de coordinación z



en cuanto elijo este paso ya no tengo mas opciones

Entonces el cociente del numero de loops respecto del numero de caminos va como:

$$\Re = \frac{2d[2d-2]}{2d[2d-1]^3} = \frac{[2d-2]}{[2d-1]^3}$$

con d muy grande

$$\Re = \frac{[2d]}{[2d]^3} = \frac{1}{d^2}$$

$$\Re_{d\to\infty} \to 0$$

Precisamente en la red de Bethe no hay loops por construccion.

1.2 Probabilidad critica

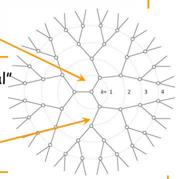
Existe alguna probabilidad por encima de la cual siempre hay un cluster que se extiende por toda la red? (sistema infinito)

Empezamos por un nodo cualesquiera que llamamos "central"

De ese nodo salen z ramas, cada una de las cuales termina en otro nodo que estara poblado con una probabilida p, entonces:
el numero esperado de caminos de tamaño 1 es:

$$p \cdot z \cdot p$$

ocupación del "final"
coordinación
ocupación del "central"



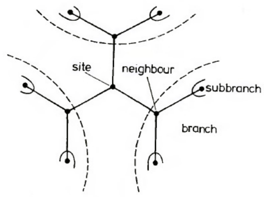
En el siguiente paso tendre $(z-1)$ nuevos pasos por nodo, cada uno dando a nuevos nodos, que estaran ocupados con probabilidad p

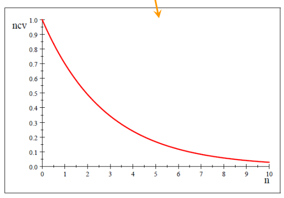
---

Para cada rama (que son equivalentes) tendre que, en funcion del numero de pasos , el numero esperado de caminos "vivos" (ncv) va como:

$$ncv = (z-1)p \cdot (z-1)p \cdot \ldots = [(z-1)p]^n \qquad (9)$$

si $(z-1)p < 1$ esto se va a 0,no hay caminos que lleven a ∞





De aqui se ve que

$$\boxed{p_c = \frac{1}{z-1}}$$

La probabilidad de tener un camino a n pasos:

$$\boxed{\frac{ncv}{nc} = \frac{[(z-1)p]^n}{(z-1)^n} = p^n}$$

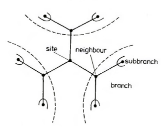
1.3 La fuerza del cluster percolante

Sea P la "fuerza del cluster infinito"

Definimos P como:
La probabilidad que el origen o cualesquiera otro nodo pertenezca al cluster infinito

Si $p < \frac{1}{z-1} \Longrightarrow P = 0$, pues no existe tal camino infinito

Sea $p > \frac{1}{z-1}$



Vemos que tenemos ramas, subramas, etc

Tomamos un nodo que **pertenezca al cluster infinito** como "central"

De este nodo salen z ramas que dan a los vecinos de los que salen subramas...

Sea **Q** la probabilidad de que una rama no llegue a ∞

Una rama es estadisticamente equivalente a una subrama

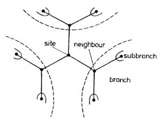
La proba de que un nodo (el vecino) no llegue a infinito por una rama es que las correpondientes subramas no lleguen a infinito.

la proba de

Para z arbitrario que una subrama no llegue a infinito es:

$$\boxed{Q^{z-1}}$$

$\Longrightarrow$. Para $z=3$ es Q^2.



Pero el nodo en consideracion debe estar ocupado y despues no llegar $\Longrightarrow$

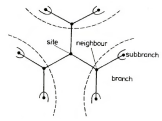
$$pQ^2$$

Como ahora pienso en la proba de que el nodo central no llegue a infinito por una de las z ramas. Pero esto es entonces Q

Luego

a) con $(1-p)$ no tiene vecino ocupado , luego no llega a infinito y aporta a la proba de no llegar.

b) si esta ocupado es pQ^2.



Entonces

La proba de que un nodo ocupado no llegue a infinito por una dada rama es

$$\boxed{Q=(1-p)+pQ^2}$$

Las soluciones son $\begin{cases} \left\{1, -\frac{1}{p}(p-1)\right\} & \text{si} \quad p \neq 0 \\ \{1\} & \text{si} \quad p=0 \end{cases}$

Pienso en un nodo central del que salen $z=3$ ramas.

Entonces la probabilidad de que ninguna de las $z=3$ ramas llegue a infinito es la proba conjunta, o sea $=Q^3$

Entonces la proba de que **si** llegue de alguna forma es $\boxed{(1-Q^3)}$

por lo tanto

$$\boxed{P=p(1-Q^3)}$$

Donde el p adelante es porque para que llegue a infinito tiene que estar ocupado y ser un origen apropiado.

(Observar que al considerar la probabilidad de que el "origen" este ocupado $\Rightarrow$ estamos considerando todos los nodos y no solo los ocupados $\Rightarrow$estamos considerando: [la masa del cluster]/[el numero de nodos en la red]

Teniamos

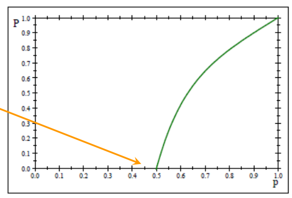
$$\boxed{P=p(1-Q^3)}$$

Para la solucion con $p \neq 0$ da entonces

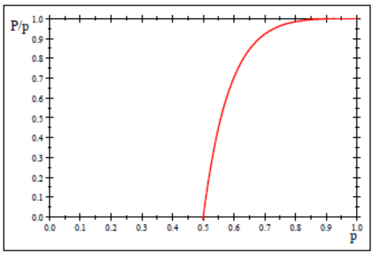
$$\boxed{P=p(1-(\frac{1}{p}(1-p))^3) \Rightarrow \frac{P}{p}=1-\left[\frac{1-p}{p}\right]^3}$$

Para $P\ (z=3)$

$$p_c(z=3)=\frac{1}{(z-1)_{z=3}}=0.5$$



El Comportamiento de $\frac{P}{p}$ ($z = 3$) es el siguiente



Calculamos otras propiedades de la red de Bethe

Tamaño medio del cluster

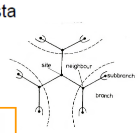
Sea $z = 3$

Como vimos podemos analizar las cosas en terminos de ramas, subramas, etc. las cuales son estadisticamente similares

S→numero medio de nodos unidos al "origen"

Podemos definir el tamaño medio de una rama, como antes la rama se separa en este caso en 2 subramas si el vecino esta ocupado y en ninguna si no esta ocupado.

$$p + p2T$$



Sea T el tamaño medio de una rama

$$T = (1-p)\cdot 0 + p(1+2T) = p(1+2T)$$

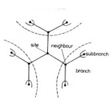
Sea T el tamaño medio de una subrama

$$T = (1-p)\cdot 0 + p(1+2T) = p(1+2T)$$

de donde $\boxed{T = p/(1-2p)}$

Como las propiedades estadisticas de la rama son las de las subramas y para un nodo ocupado salen 3 ramas cada una de ellas con tamaño medio T

$$\boxed{S = 1 + 3T = 1 + 3\frac{p}{(1-2p)} = \frac{1+p}{1-2p}}$$



Es valido para $p < p_c$

S en la vecindad del critico

Por encima de p_c el cluster infinito domina, por debajo pero en la vecindad podemos escribir (el denominador se va a 0 por ser $p_c = 1/2$), entonces

$$\boxed{S = (1+p)/(1-2p) = (1+p)/2(1/2-p) = (1+p)/2(p_c-p)}$$

Luego

$$\boxed{S \sim 1/(p_c - p)}$$

P en la vecindad del critico

Vimos que

$$\boxed{P/p = 1 - \left[\frac{1-p}{p}\right]^3 \Rightarrow P = p\left[1 - \left[\frac{1-p}{p}\right]^3\right]}$$

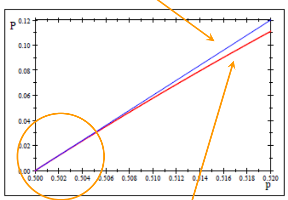
Ademas si nos acercamos a p_c por arriba

$$P = p(1 - \left[\frac{1-p}{p}\right]^3)$$

en la vecindad de p_c (por arriba) $\quad p\left(1-\left[\frac{1-p}{p}\right]^3\right) = p - p\left[\frac{1-p}{p}\right]^3 \to p - p_c$

$\Rightarrow$

$$\boxed{P \propto (p - p_c)}$$



$$\boxed{P = p(1 - \left[\frac{1-p}{p}\right]^3)}$$

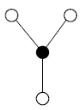
El numero de clusters en Bethe

En 1 dimension tenemos que los clusters tienen perimetro 2

En mas dimensiones teniamos multitud de perimetros

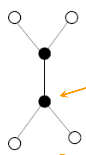
Para una red de Bethe de coordinacion z tenemos:

Para $V = 1$ el perimetro es z



Para $V = 2$, al agregar 1 lo saco del perimetro y agrego $(z-1) \Rightarrow$

$$t = z - 1 + (z-1) = 2z - 2 = 2(z-2) + 2$$



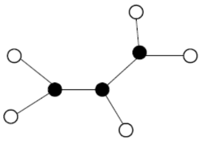
era perímetro

nuevos “perimetros”

Para $V = 3$ pasa lo mismo

$$t = 2(z-2) + 2 - 1 + (z-1) = 2(z-2) + 2 + (z-2$$

$$= 3(z-2) + 2$$



o sea que cada vez que agrego un nodo estoy agregando $(z-2)$ a t

Entonces en general :

a) al agregar un nodo incremento s en 1

b) al agregar un nodo incremento t en $(z-2)$;$(z-1$ por los perimetro nuevos y -1 por el perimetro que ocupe)

$$\boxed{t = s(z-2) + 2}$$

Si $s \to \infty \Rightarrow t \propto s$ con . $\left[p_c = \frac{1}{z-1}\right]$

$$t/s = (z-2) = 1/p_c - 1 = [1 - p_c]/p_c$$

O sea que nuevamente el perimetro sobre la masa es una constante.

Teniendo el perimetro y usando el hecho que el perimetro es unico podemos usar la formula para lattice animals

$$\boxed{n_s(p) = g_s p^s (1-p)^t = g_s p^s (1-p)^{(s(z-2)+2)}}$$

Como los factores de degeneracion son siempre dificiles de calcular es apropiado usar $n_s(p)/n_s(p_c)$ con lo que se simplifica

$$\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = \frac{p^s(1-p)^{(s(z-2)+2)}}{p_c^s(1-p_c)^{(s(z-2)+2)}} = \left[\frac{(1-p)}{(1-p_c)}\frac{p}{p_c}\right]^s \left[\frac{(1-p)}{(1-p_c)}\right]^{s(z-3)} \left[\frac{(1-p)}{(1-p_c)}\right]^2$$

$$s(z-2) = s + s(z-2) - s = s + s(z-2-1) = s + s(z-3)$$

Entonces para $z = 3$

$$\boxed{\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = \left[\underbrace{\frac{(1-p)}{(1-p_c)}\frac{p}{p_c}}\right]^s \left[\frac{1-p}{1-p_c}\right]^2}$$

$$p = p_c - \Delta \Longrightarrow \frac{(1-p_c+\Delta)}{(1-p_c)}\frac{(p_c-\Delta)}{p_c} = \frac{1}{p_c(p_c-1)}(\Delta - p_c)(\Delta - p_c + 1) =$$
$$= -\frac{1}{p_c - p_c^2}(\Delta^2 - 2\Delta p_c + \Delta + p_c^2 - p_c)$$
$$= -(\frac{1}{p_c - p_c^2}(\Delta^2 - 2\Delta p_c + \Delta + (p_c^2 - p_c)))$$

Lo cual puede ser reescrito con $p_c = 1/2$

$$\Longrightarrow 1 - \frac{\Delta^2}{p_c - p_c^2} = [1 - a\Delta^2]$$

va quedando entonces $\dfrac{n_s(p)}{n_s(p_c)} = [1 - a\Delta^2]^s \left[\dfrac{1-p}{1-p_c}\right]^2$

para el otro termino.

$$\left[\frac{1-p_c+\Delta}{1-p_c}\right]^2 = \left[1+\frac{\Delta}{1-p_c}\right]^2 = \frac{\Delta^2}{(p_c-1)^2} - 2\frac{\Delta}{p_c-1} + 1$$

en p_c=0.5 $\longrightarrow$ $\boxed{1-4\Delta+4\Delta^2,}$

Resulta entonces para la dependencia en s $\boxed{\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \propto \left[1-a\Delta^2\right]^s}$

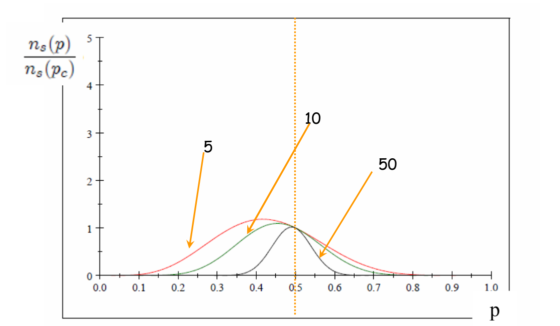
Enconces con $a=4$ y $c=-\ln\left[1-a\Delta^2\right]$ resulta

$$\boxed{\frac{n_s(p)}{n_s(p_c)} \propto \exp(-cs)}$$

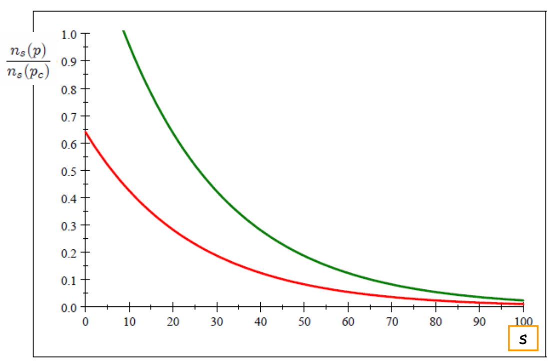
luego tenemos un simple decaimiento exponencial

$$\Rightarrow \boxed{n_s(p)=n_s(p_c)\exp(-cs)}$$

variacion con p para distintos valores de s



En funcion de s para p=0.6 (rojo) , p=0.4 (verde)



Respecto de $n_s(p_c)$

Vimos que el tamaño medio de los clusters, $S=\langle s\rangle$

$$\boxed{S = \sum \frac{n_s s}{\sum n_s s} s = \sum \frac{n_s s^2}{\sum n_s s} = \sum \frac{n_s s^2}{p} = \frac{1}{p}\sum n_s s^2}$$

O sea que $S \propto \sum n_s s^2$

Debajo de p_c, S debe ser finito$\Rightarrow n_s$ debe decaer suficientemente rapido, o sea una posible forma de n_s es

$\boxed{\exp(-\alpha s) \text{ o } s^{-\alpha}}$

Pero **en** p_c aparece el cluster $\infty \Rightarrow S \to \infty$ entonces la exponencial no sirve

Proponemos:

$$\boxed{n_s \propto s^{-\tau}}$$

Con lo que recuperamos el τ de Fisher!

Recordando

$$n_s(p) \propto n_s(p_c)\exp(-cs) \rightarrow s^{-\tau}\exp(-cs)$$

Con esto, calculo S para $p \lesssim p_c$, y resulta:

$$S = \sum s^{2-\tau}\exp(-cs) \sim \int s^{2-\tau}\exp(-cs)\, ds$$

si $z = cs \Rightarrow dz = cds \Rightarrow S \sim c^{(\tau-3)}\int z^{2-\tau}\exp(-z)\, dz$ pero

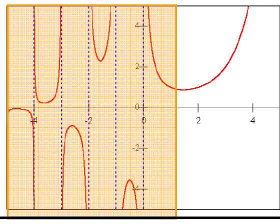
pero tengamos en cuenta que

$$\int z^{t-1}\exp(-z)dz = \Gamma(t)$$

luego

$$\boxed{\left[\int z^{2-\tau}\exp(-z)dz = -\Gamma(3-\tau)\right]}$$

La funcion Gamma es



Entonces

$$\boxed{S \sim c^{(\tau-3)}\int z^{2-\tau}\exp(-z)dz \sim c^{(\tau-3)}}$$

recordando que

$$\begin{aligned} c &= -\ln\left[1 - a\Delta^2\right] \\ &y \\ p &= p_c + \Delta \end{aligned}$$

entonces para Δ pequeño

$$-\ln(1-x) \sim x \Longrightarrow c \sim (p-p_c)^2$$

entonces

$$\boxed{S \sim \left[(p-p_c)^2\right]^{(\tau-3)} = (p-p_c)^{2\tau-6}}$$

Pero sabemos que [17] $S \sim \frac{1}{p_c - p}$, de donde

$$2\tau - 6 = -1$$

de donde , para la red de bethe,

$$\boxed{\tau = 5/2}$$

Que se llama : el coeficiente de Fisher.

A partir de esto vemos que como

$$\boxed{n_s(p) \propto s^{-\tau}\exp(-cs) \rightarrow s^{-5/2}\exp(-cs)}$$

y en la vecindad de p_c resulta ser

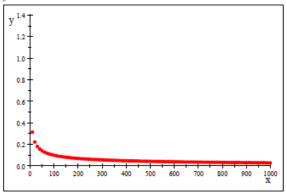
$$\boxed{n_s(p) \propto s^{-\tau}\exp(-(p-p_c)^2 s)}$$

Apendice

Sea $c \sim 0.01$

Sea $\tau = 2.5$

$s^{-0.5}\exp(-0.001s)$



$\sum_{1}^{50} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 12.517$

$\sum_{1}^{100} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 17.938$

$\sum_{50}^{100} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 5.5555$

$\sum_{1}^{1000} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 45.779$

$\sum_{50}^{1000} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 33.397$

$\sum_{50}^{10000} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 42.207$

$\sum_{1}^{10000} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 54.589$

$\sum_{1}^{100000} s^{-0.5}\exp(-0.001s) = 54.590$

$\int_{1}^{50} s^{-0.5}\exp(-0.001s)\, ds = 11.911$

$\int_{1}^{1000} s^{-0.5}\exp(-0.001s)\, ds = 45.234$

$\int_{1}^{10000} s^{-0.5}\exp(-0.001s)\, ds = 54.05$

$\int_{1}^{100000} s^{-0.5}\exp(-0.001s)\, ds = 54.051$

$(54.590 - 54.051)/54.051 = 9.9721 \times 10^{-3}$

Asi que estamos al 1%

$\int_{a}^{b} s^{-0.5}\exp(-0.001s)\, ds = 56.050\,\mathrm{erfc}(3.1623 \times 10^{-2}\sqrt{a}) - 56.050\,\mathrm{erfc}\left(3.1623 \times 10^{-2}\sqrt{b}\right)$

:Kirkpatrick Rev.Mod.Phys. 45(1973)574