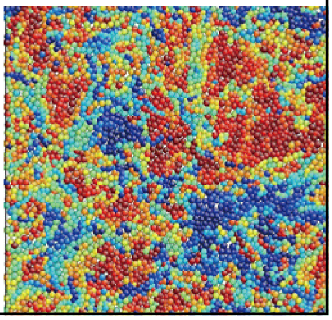
SCALING



侍

Solucion de escala para el numero de fragmentos

Habiamos visto

Caso unidimensional

$$n_s = p^s(1-p)^2 = p^s(p-p_c)^2 \Rightarrow$$
$$\ln(n_s) = s\ln(p) + \ln(p-p_c)^2 \Rightarrow \propto -s$$

.

Caso dimension ∞

$$n_s \propto s^{-5/2}\exp(-cs) \Rightarrow$$
$$\ln(n_s) = -\tfrac{5}{2}\ln(s) - cs \Rightarrow \propto -s$$

Tomando esta "similaridad" como base y suponiendo que la relacion para "altas dimensiones es mas general" $\rightarrow$

Proponemos

$$\boxed{n_s = s^{-\tau}\exp(-cs)}$$

pero admitimos que c no es necesariamente $(p-p_c)^2$, proponiendo la forma mas general

$$\boxed{c \propto |p-p_c|^{1/\sigma}}$$

para $p \to p_c$ y ademas s grande. Necesitamos que aparezca el modulo pues debe ser real

Tomando esto como valido, hacemos :

P es la fuerza del cluster percolante (probabilidad de que un nodo pertenezca al cluster percolante)

$$P = \frac{\#\,nodos \in C_\infty}{\#\,nodos} \qquad p = \frac{\#\,nodos\ ocupados}{\#\,nodos}$$

Recordemos que $P + \sum n_s s = p$

(donde hemos separado la contribución del C_∞ (si existe))

a) $P = N_{cluster\infty} s_\infty / L^d = n_{cluster\infty} s_\infty$

Atencion : $n_s|_\infty = 0$ pues hay a lo sumo un cluster infinito (al menos en 3 dimensiones) y entonces el numero de clusters por nodo es 0.

(en p_c, o sea :como escalea s(p) con L^d)

b) $\sum n_s s = \sum N_s s / L^d$

Fuerza del cluster percolante

Para calcular el numero de nodos en el cluster ∞ escribimos:

$$\boxed{P + \sum n_s s = p \Rightarrow P = p - \sum n_s s,}$$

exactamente en p_c , $P = 0$ y entonces $\sum n_s(p_c) s_c = p_c$, o sea

$$\boxed{p_c = \sum s s^{-\tau} = \sum s^{1-\tau},}$$

$n_s = s^{-\tau}\exp(\cancel{-cs})$

para que la suma converja necesitamos $\tau > 2$

$\int s^{-x} ds : -\frac{s^{1-x}}{x-1} |_1^\infty$ = si $x > 1$ converge $\Rightarrow \tau > 2$

En p_c la fuerza del cluster percolante es 0 (recordemos que para Bethe $P \propto (p - p_c)$),

Entonces en la vecindad de p_c tenemos

$$\boxed{\begin{array}{l} i)\ P + \sum n_s s - p = 0 \\ ii)\ 0 + \sum n_s s|_{p_c} - p_c = 0 \end{array}}$$

puedo escribir

$$\boxed{P = p - \sum n_s s + \underbrace{\sum n_s(p_c) s - p_c}_{0}}$$

Para $p \neq p_c \Rightarrow n_s = s^{-\tau}\exp(-cs)$, con $c \propto |p - p_c|^{1/\sigma}$

Para $p = p_c \Rightarrow n_s = s^{-\tau}$

Entonces

$$\boxed{\begin{array}{l} P = -\sum s^{-\tau}\exp(-cs)s + \sum s^{-\tau}s + [p - p_c] \\ \propto \sum_s s^{1-\tau}[1 - \exp(-cs)] \end{array}}$$

son los grandes

Como los terminos dominantes, como ya vimos, en $p \sim p_c$ tenemos

$$\boxed{P \propto \int s^{(1-\tau)}[1 - \exp(-cs)]}$$

Integrando por partes , i.e. $f(s) = s^{2-\tau}$, $g(s) = 1 - \exp(-cs)$ resulta $\int f' g = -\int f g' ds + fg$

Integrando por partes , i.e. $f(s) = s^{2-\tau}$, $g(s) = 1 - \exp(-cs)$ resulta que $\int f' g = -\int f g' ds + fg$ y con $z = cs$ da

fg

a) como $\tau > 2$ $\boxed{fg(\infty) = \frac{1}{s^{\tau-2}}\left[1 - \frac{1}{\exp(cs)}\right]}$ se va a 0

$$\boxed{fg(1) = \text{se va a } 0}$$

∫fg´ds

b) $g'(s) = [1 - \exp(-cs)]' \rightarrow e^{-sc}c \Rightarrow P \propto c\int s^{2-\tau}\exp(-cs)\, ds$

$= c\int c^{\tau-2} z^{2-\tau}\exp(-z)\, dz \frac{1}{c} = \underbrace{c^{\tau-2}}\ \underbrace{\int z^{2-\tau}\exp(-z)\, dz}_{\text{Cte.}}$

$\int z^{2-\tau}\exp(-z)\, dz = -\Gamma(3 - \tau, z)$

Entonces

$$\boxed{P \propto c^{\tau-2}}$$

pero c era en la forma general $\propto (p-p_c)^{1/\sigma}$ entonces

$$\boxed{P \propto (p-p_c)^{(\tau-2)/\sigma} = (p-p_c)^{\beta}}$$

con

$$\boxed{\beta = \frac{(\tau-2)}{\sigma}}$$

que debe compararse con el comportamiento en la red de Bethe $\rightarrow$

$$\boxed{P \propto (p-p_c)}$$

S

Ademas podemos ver como se comporta S en el umbral,

Recordemos que:

$$S = \sum s^2 n_s/p \Rightarrow S = \sum s^2 n_s/p_c \Rightarrow S \propto \sum s^2 n_s$$

(las sumas excluyen el cluster infinito)

$$\boxed{\begin{aligned} S &\propto \int s^2 n_s ds \\ &\propto c^{\tau-3}\int z^{2-\tau}\exp(-z)dz \end{aligned}}$$

Luego

$$\boxed{S \propto c^{\tau-3} \propto |p-p_c|^{[\tau-3]/\sigma}}$$

Definimos entonces otro exponente "critico"

$$\boxed{\gamma = (3-\tau)/\sigma}$$

!!!!!!!!!!!!

γ debe ser > 0 y β tambien, entonces

$$\boxed{2 < \tau < 3}$$

Todo sugiere que cada vez que calculamos algo tenemos que definir un nuevo exponente critico!

Momentos de la distribucion

Lo que hemos calculado hasta ahora son cosas de la forma

$$\boxed{M_k = \sum_s s^k n_s}$$

esto es el "k-esimo" momento de la distribucion del numero de fragmentos

Recordemos:

$$P = p - \sum n_s s + \sum n_s(p_c)s - p_c \qquad S \propto \int s^2 n_s ds$$

Operando como siempre

$$M_k \propto \sum_s s^{k-\tau}\exp(-cs)$$

$$\propto \int s^{k-\tau}\exp(-cs)\,ds$$

$$= c^{\tau-1-k}\int z^{k-\tau}\exp(-z)\,dz$$

Entonces resulta

$$\boxed{M_k \propto c^{\tau-1-k} \propto |p-p_c|^{(\tau-1-k)/\sigma}}$$

De donde vemos que todas estas expresiones solo dependen de 2

exponentes, τ y σ o de culaesquiera par que tomemos.

$$\boxed{\sigma = 1/(\beta+\gamma) \qquad \tau = 2+\beta/(\beta+\gamma)}$$

Este resultado es aplicable si la suma diverge.

Por ejemplo $M_1 = \sum s n_s$ es la fuerza del cluster percolante, que no diverge.

Entonces calculamos la derivada de $M_1 = \sum s^{1-\tau}\exp(-cs)$ pero podemos calcular la derivada con respecto de c y obtenemos

$$-\frac{\partial M_1}{\partial c} = \sum s^{2-\tau}\exp(-cs) = M_2 \propto c^{\tau-3} \Rightarrow M_1 = cte + c^{\tau-2}$$

Problemas con las suposiciones en este calculo

a) la ley de escala usada no incluye al caso unidimensional

Si uno hace las cuentas no encuentra forma de llevar una forma a la otra.

b) P tiene un comportamiento simetrico respecto de p_c

Pues n_s es simetrico respecto de p pues la distancia al punto critico aparece en modulo.

c) Sabemos que $n_s(p) = \sum_t g_{st}\, p^s (1-p)^t$, o sea un polinomio en p finito que no diverge (ni sus derivadas) en p_c. Pero la

$n_s = s^{-\tau}\exp(-(p-p_c)^{1/\sigma}s)$ tendra divergencias en p_c si $1/\sigma$ no es entero.

derivadas