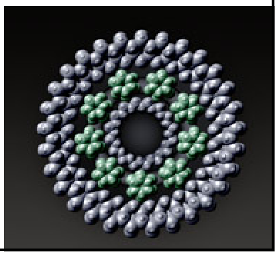
Hipotesis de escala f(z)



侍

Hipotesis de escala

$|p-p_c|^{1/\sigma} s$

Relaciones de escala que tenemos

a) $n_s \propto s^{-\tau} \exp(-cte\,|p-pc|s)$ (suposicion)

b) $n_s \propto s^{-\tau} \exp(-cte\,(p-p_c)s^{\sigma})$ (tipo Fisher con s^{σ})

Podemos poner ambas en la forma

$\frac{n_s}{n_s(p_c)} = f(z)$; con $z = (p-p_c)s^{\sigma}$

para $p \sim p_c$ y $s \to \infty$.

Entonces queda

$$\boxed{n_s \propto s^{-\tau} f[(p-p_c)s^{\sigma}]}$$

Propiedades de esta solucion (comportamiento de f)

$$\boxed{n_s \propto s^{-\tau} f[(p-p_c)s^{\sigma}]}$$

?

el limite de una dimension:

$\boxed{n_s = p^s(1-p)^2}$

identificamos z

como $(p-p_c)s^{\sigma} = z$, con $\sigma = 1$ y $p_c = 1 \Rightarrow \boxed{z = (p-1)s}$

a) con $[z^2 s^{-2}] = (1-p)^2 s^2 s^{-2} = (1-p)^2$ tengo uno de los factores

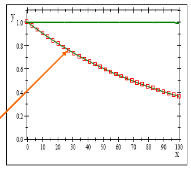
b) falta el p^s

sea $x = (1-p) \Rightarrow z = -xs$

$\ln(\exp(-xs)) \to -sx$

$\ln(p^s) = s(\ln(1-x)) = (-x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{8}x^8 - \frac{1}{9}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + O(x^{11}))s$

si $x \to 0$ queda $: \ln(p^s) \approx -xs \Rightarrow \boxed{p^s \to e^{-xs}}$



0.99^x (azul) , $\exp(-0.01x)$ (rojo) , $[0.99^x]/[\exp(-0.01x)]$ (verde)

O sea que lo escribimos como $\boxed{n_s = [z^2 s^{-2}]\exp(z)}$, resultando $\boxed{\tau = 2}$

$\boxed{\sigma = 1}$

$$\boxed{n_s = [z^2 s^{-2}]\exp(z) = s^{-2}[z^2 \exp(z)] = s^{-2}[f(z)]}$$

Comportamiento arriba y abajo punto critico

No queremos que exista cluster percolante debajo de p_c

Haciendo la misma cuenta usual

con $z = (p - p_c)s^{\sigma}$ $\quad \Rightarrow dz = \sigma z \, ds/s$

$\Rightarrow s = z^{1/\sigma}(p - p_c)^{-1/\sigma}$

$z = (p - pc)s^{\sigma} \Rightarrow \boxed{s = [z/(p - p_c)]^{1/\sigma} = [|z|/|p - p_c|]^{1/\sigma}}$

$dz = (p - pc)\sigma s^{(\sigma-1)} ds \Rightarrow \boxed{ds = dz/[(p - p_c)\sigma s^{(\sigma-1)}]}$

ATENCION las integrales se hacen
a) entre 0 y ∞ para $p > p_c$
b) entre 0 y $-\infty$ para $p < p_c$
de alli los modulos

$$P = p - \sum_s n_s s + \sum_s n_s(p_c)s - p_c$$

$$-P = \left[\sum_s n_s s - \sum_s n_s(p_c)s\right] - [p - p_c]$$

$$\boxed{-P \;=}\; \sum_s [n_s(p) - n_s(p_c)]s \;+ O(p - p_c)$$

$$= \int s^{1-\tau}[f(z) - f(0)]\, ds$$

$$= \int z^{(2-\tau)/\sigma}|(p - p_c)|^{-(2-\tau)/\sigma}\tfrac{1}{z}[f(z) - f(0)]\, dz/\sigma$$

$$\boxed{= |(p - p_c)|^{(\tau-2)/\sigma}\int |z|^{-1+(2-\tau)/\sigma}[f(z) - f(0)]\, dz/\sigma}$$

Como $\beta = (\tau - 2)/\sigma$ y $\gamma = (3 - \tau)/\sigma$ obtenemos que $\beta + \gamma = 1/\sigma$

reemplazando obtenemos $\boxed{-P = (\beta + \gamma)(p - p_c)^{\beta}\int z^{-1-\beta}[f(z) - f(0)]\, dz}$

La integral se hace en el rango $[0, \infty]$ para $p > p_c$ $(z > 0)$ y $[0, -\infty]$ para $p < p_c$ $(z < 0)$

Entonces $f(z)$ debe ser tal que cuando $z > 0 \rightarrow P \neq 0$

Tambien, $f(z)$ debe ser tal que cuando $z < 0 \rightarrow P = 0$ y por lo tanto $\int z^{-1+(2-\tau)/\sigma}[f(z) - f(0)]\, dz = 0$

o tambien $\int z^{-(2-\tau)/\sigma}\frac{[f(z) - f(0)]}{z}\, dz$ o tambien $\int z^{-(2-\tau)/\sigma}\frac{df(z)}{dz}\, dz = 0$

$f(-\infty) \rightarrow 0$ (pues corresponde a $p < p_c$ con s grande), si $f(z)$ crece desde 0 no puede ser siempre creciente pues para que se anule la integrar debera "oscilar" alrededor de $f(0)$.

Ademas f(0)=1 $\Leftarrow$ en p_c tenemos una powerlaw

$z = (p - pc)s^{\sigma}$

Se ha demostrado de $f(z)$tiene un solo maximo.

Sea este maximo z_{max} y sea $f(z_{max}) = f_{max} \Rightarrow f(z) < f_{max} \; \forall \; z \neq z_{max}$

Entonces dado $n_s \propto s^{-\tau}f(z)$ si fijo el valor de s existira un maximo de n_s en p_{max} que corresponde a (por debajo de p_c)

$$\boxed{z_{max} = (p_{max} - p_c)s^{\sigma} \Rightarrow p_{max} = p_c + z_{max}s^{-\sigma}.}$$

Para cada s

O tambien :

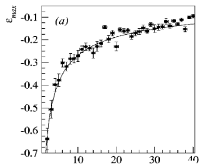
$$p_{\max} - p_c = z_{\max} s^{\sigma}$$
$$p_{\max} - p_c = \varepsilon_{\max}$$
$$\varepsilon_{\max} = z_{\max} s^{\sigma}$$

PHYSICAL REVIEW C, VOLUME 62, 064603

Statistical signatures of critical behavior in small systems

J. B. Elliott,[1] S. Albergo,[2] F. Bieser,[6] F. P. Brady,[3] Z. Caccia,[2] D. A. Cebra,[3] A. D. Chacon,[7] J. L. Chance,[3] Y. Choi,[1] S. Costa,[2] M. L. Gilkes,[1] J. A. Hauger,[1] A. S. Hirsch,[1] E. L. Hjort,[1] A. Insolia,[2] M. Justice,[5] D. Keane,[5] J. C. Kintner,[3] V. Lindenstruth,[4] M. A. Lisa,[6] H. S. Matis,[6] M. McMahan,[6] C. McParland,[6] W. F. J. Müller,[4] D. L. Olson,[6] M. D. Partlan,[3] N. T. Porile,[1] R. Potenza,[2] G. Rai,[6] J. Rasmussen,[6] H. G. Ritter,[6] J. Romanski,[2] J. L. Romero,[3] G. V. Russo,[2] H. Sann,[4] R. P. Scharenberg,[1] A. Scott,[5] Y. Shao,[5] B. K. Srivastava,[1] T. J. M. Symons,[6] M. Tincknell,[1] C. Tuvé,[2] S. Wang,[5] P. G. Warren,[1] H. H. Wieman,[6] T. Wienold,[6] and K. Wolf[7]

como $\varepsilon_{\max}$ es el valor del parametro de control para el cual la "produccion" de clusters de tamaño s es maximo tenemos que esta relacionado con s via una simple power law



6x6x6

FIG. 18. Results of the σ extraction procedure for (a) percolation as a function of p_l, (b) perco-

Tambien

PHYSICAL REVIEW B VOLUME 22, NUMBER 5 1 SEPTEMBER 1980

Scaling studies of percolation phenomena in systems of dimensionality two to seven: Cluster numbers

Hisao Nakanishi*† and H. Eugene Stanley

Department of Physics and Center for Polymer Studies, Boston University, Boston, Massachusetts 02215

(Received 27 December 1979)

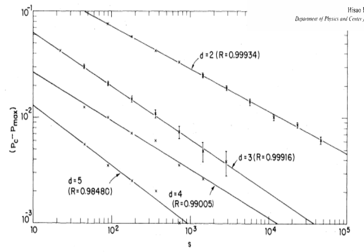


FIG. 2. Test of scaling for the maxima of n_s curves for $d=2$, 3, 4, and 5. The error bars included for $d=2$ and 3 are those associated with finding $p_{\max}$ on the n_s curves, not including the errors in each point on these same curves.

In two dimensions, we obtain in this way p_c^{eff} =0.50115 for the bond problem on the square lattice (where $p_c = 0.5$ exactly), and the fitted line gives

$$(p_c^{\mathrm{eff}} - p_{\max}) s^{0.400 \pm 0.010} = 0.458 \pm 0.03 \quad , \qquad (2.6a)$$

Por otro lado tenemos que

$$n_s(\varepsilon) = q_0 s^{-\tau} f(z)$$

De donde

$$\frac{n_s(\varepsilon)}{q_0 s^{-\tau}} = f(z)$$

Un maximo

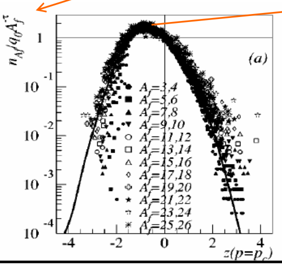


FIG. 19. Results of the scaling function analysis with the critical point equal to the value as determined from the Fisher τ-power-law analysis for (a) percolation as a function of $z(p_l)$, (b) per-

"data collapse"

No queremos que existan divergencias en derivadas de p

Supondremos tambien que $f(z)$ es analitica (sus derivadas son finitas en todo punto)

Queremos recalcular γ

Finalmente calculamos

$$
\begin{aligned}
S &\propto \sum s^2 n_s \\
&\propto \int s^{2-\tau} f(z)\, ds \\
&\propto |p - p_c|^{(\tau-3)/\sigma} \int \dots \\
&\propto |p - p_c|^{(\tau-3)/\sigma} = |p - p_c|^{-\gamma}
\end{aligned}
$$

entonces

Los exponentes criticos son importantes porque no dependen de la estructura de la red y solo dependen de la dimension.

El numero total de clusters se calcula del mismo modo

$$M_0 \propto | \quad |$$

Esto ha sido constatado en numerosos tests numericos

$f(z)$ se determina en general por analisis numerico.

Tests numericos

Log-Log representacion de los numeros de fragmentos en el punto critico para red triangular (95000X95000)

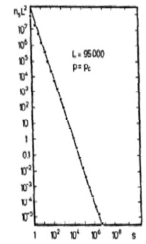


Fig. 12. High-quality data on cluster numbers at the percolation threshold, based on one simulation of a 95 000 × 95 000 triangular lattice. The slope of the straight line in this log-log plot gives $-\tau$, the Fisher exponent of Eq. (20). From Margolina *et al.* (1984); see also Rapaport (1985, 1992).

Si nos fijamos en la ecuacion de escala para los fragmentos

tenemos que

$$\boxed{n_s \propto s^{-\tau} f(z)}$$

De donde $[n_s(p)/n_s(p_c)] = f(z)$ con $z = (p - p_c)s^{\sigma}$

O sea que si tomo los cocientes para diferentes masas y grafico para z deberia obtener la "misma" curva

Esto se calculo y se grafico en rangos (32-63) (64-127) etc y efectivamente da.

Si se calcula P y M_2 sabemos que se deben comportar como

$P \propto (p - p_c)^{\beta}$ con $\beta = (\tau - 2)/\sigma$

$M_2 \propto |p - p_c|^{(\tau - 1 - 2)/\sigma}$

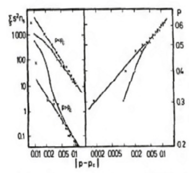


Fig. 14. Log-log plot of the strength P of the infinite cluster (right) and of the second moment M_2 of the cluster size distribution (left) for the triangular lattice, using the low-quality data of the computer output in Appendix A (500 × 500 triangular lattice). For $p_c = 1/2$, the exact value, the data are difficult to analyse (dots). If p_c is shifted to 0·5083 to take into account some finite size effects (crosses), we get reasonable straight lines with slopes close to the exponents found in more accurate studies.

Como el data usado es para una red pequeña si estudio el data como viene, no dan las rectas que espero, pero si admito que $p_c = 0.5083$ (para tomar en cuenta los efectos de tamaño finito) , da mas o menos bien.

Table 2. Percolation exponents for $d = 2, 3, 4, 5, 6 - \epsilon$ and in the Bethe lattice together with the page number defining the exponent. Rational numbers give (presumably) exact results, whereas those with a decimal fraction are numerical estimates.

Exponent	$d=2$	$d=3$	$d=4$	$d=5$	$d=6-\epsilon$	Bethe	Page
α	$-2/3$	$-0{\cdot}62$	$-0{\cdot}72$	$-0{\cdot}86$	$-1+\epsilon/7$	-1	39
β	5/36	0·41	0·64	0·84	$1-\epsilon/7$	1	37
γ	43/18	1·80	1·44	1·18	$1+\epsilon/7$	1	37
ν	4/3	0·88	0·68	0·57	$\frac{1}{2}+5\epsilon/84$	1/2	60
σ	36/91	0·45	0·48	0·49	$\frac{1}{2}+O(\epsilon^2)$	1/2	35
τ	187/91	2·18	2·31	2·41	$\frac{5}{2}-3\epsilon/14$	5/2	33
$D(p=p_c)$	91/48	2·53	3·06	3·54	$4-10\epsilon/21$	4	10
$D(p<p_c)$	1·56	2	12/5	2·8	–	4	62
$D(p>p_c)$	2	3	4	5	–	4	62
$\zeta(p<p_c)$	1	1	1	1	–	1	56
$\zeta(p>p_c)$	1/2	2/3	3/4	4/5	–	1	56
$\theta(p<p_c)$	1	3/2	1·9	2·2	–	5/2	54
$\theta(p>p_c)$	5/4	$-1/9$	1/8	$-449/450$	–	5/2	54
f_{max}	5·0	1·6	1·4	1·1		1	42
μ	1·30	2·0	2·4	2·7	$3-5\epsilon/21$	3	91
s	1·30	0·73	0·4	$0{\cdot}1_5$		0	93
D_B	1·6	$1{\cdot}7_4$	1·9	2·0	$2+\epsilon/21$	2	95
$D_{min}(p=p_c)$	1·13	1·34	1·5	1·8	$2-\epsilon/6$	2	97
$D_{min}(p<p_c)$	1·17	1·36	1·5		–	2	98
$D_{max}(p=p_c)$	1·4	1·6	1·7	1·9	$2-\epsilon/42$	2	97

For the exponents at p_c, the Bethe lattice values are exact at $d \geq 6$. A dash means that 6 is not the upper critical dimension for the ϵ-expansion.

El numero de clusters lejos de p_c

Por debajo de p_c

En esta region es apropiado pensar que el numero de clusters es exponencial.

$$\boxed{\ln n_s \propto -s \qquad (s \to \infty\, ,\, p < p_c)}$$

Lo cual es consistente con la aproximacion de Fisher.

(S finito)

Por otro lado tenemos que el comportamiento de los lattice animals

es del tipo $g_s \propto s^{-\theta} cte^s$ de donde

$$\boxed{\ln g_s \propto -\theta \ln s + s \ln cte \propto s \qquad (s \to \infty)}$$

luego va como cte^s

Entonces como para p pequeño $n_s(p \to 0) \propto s^{-\theta} p^s cte^s$ (esto es asi porque el termino $(1-p)^t$es del orden de 1 en $p \sim 0$) el comportamiento exponencial es correcto.

Por encima de p_c

En esta region

$$\boxed{\ln n_s(p > p_c) \propto -s^{1-1/d}}$$

Pero $s^{1-1/d}$ es esencialmente la superficie de una esfera en d dimensiones, o sea que corresponden a estructuras compactas en promedio.

Se supone que esto es valido para s grande

Si quiero cortar una esfera en $p >> p_c$ tendre que hacer $(1-p)^t$ pero $t \propto r^2$ o sea $(1-p)^{r^2} \Rightarrow n_s \propto \exp(-cte \bullet r^2) = \exp(-cte \bullet s^{1-1/d})$