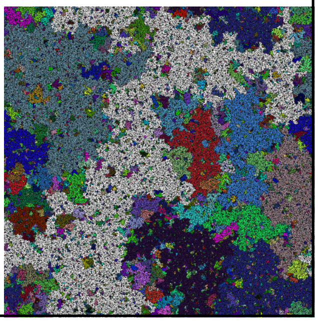
Estructura



侍

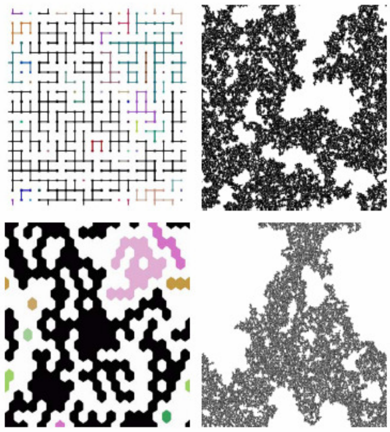


Fig. 12.7 Universality in percolation. Universality suggests that the entire morphology of the percolation cluster at p_c should be independent of microscopic details. On the top, we have bond percolation, where the bonds connecting nodes on a square lattice are occupied at random with probability p; the top right shows the infinite cluster on a 1024×1024 lattice at $p_c = 0.5$. On the bottom, we have site percolation on a triangular lattice, where it is the hexagonal sites that are occupied with probability $p = p_c = 0.5$. Even though the microscopic lattices and occupation rules are completely different, the resulting clusters look statistically identical. (One should note that the site percolation cluster is slightly less dark. Universality holds up to overall scale changes, here up to a change in the density.)

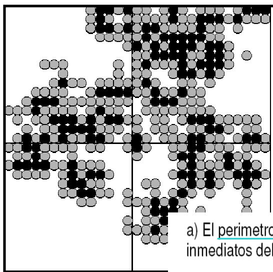
Estructura de los fragmentos

Algunas propiedades de los clusters

a) perimetro

b) superficie

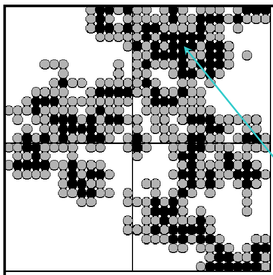
c) radio



a) El perimetro t es el numero de nodos vacios que son vecinos inmediatos del cluster.

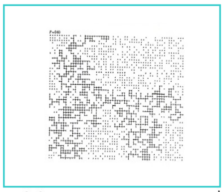
b) El tamaño o masa s del cluster es el conjunto de nodos ocupados del cluster

c) Tambien definimos la superficie A que es el conjunto de nodos del cluster que son vecinos del perimetro



d) Finalmente tenemos el Bulk B que es el conjunto de nodos del cluster que no son vecinos del perimetro.

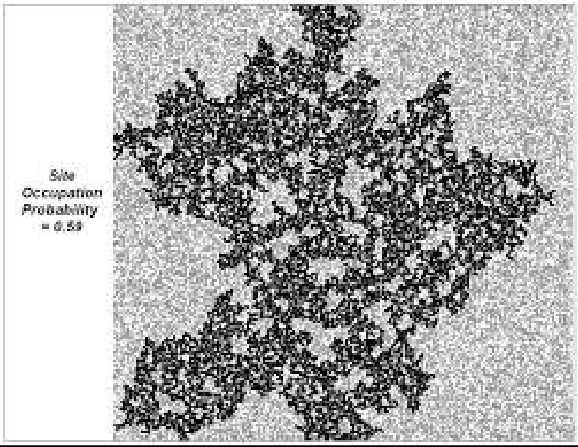
Es este perimetro lo mismo que una superficie usual? es decir escalea como $s^{1-1/d}$?

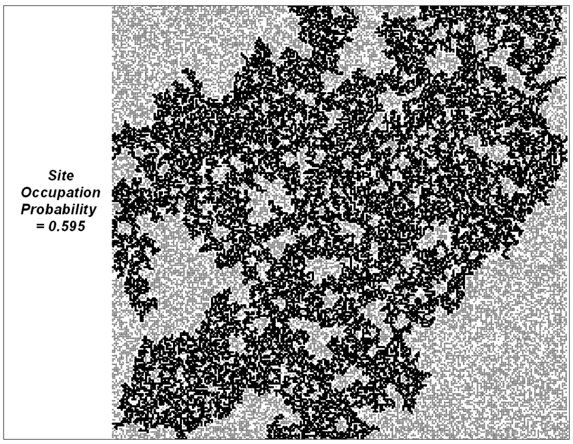


En esta figura $p = 0.6$ que es muy cercana por encima a p_c

Cuando miramos a un cluster en la **region critica** observamos que "esta lleno de agujeros".

Estos nodos no ocupados contribuyen al perimetro y si podemos





"experimental!"

Aldefinir una densidad tipica de agujeros interiores tendremos que t sera proporcional a la masa del cluster!.

Esto es asi y resulta entonces que

$$\boxed{t \propto s \qquad (s \to \infty)}$$

por la presencia de agujeros el perimetro crece con la masa de esta forma

Radio de un cluster

Hay varias posibles definiciones :

-Sea $\mathbf{r}_0 = \frac{1}{s}\sum_1^s \mathbf{r}_i$ el centro de masa del sistema, entonces el radio de giro esta dado por

$$\boxed{R_s^2 = \sum_i \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_0)^2}{s}}$$

Esto vale para un cluster y se promedia sobre todos los clusters de tamaño s.

-La distancia media entre todos los pares de nodos de un cluster es

$$\boxed{\frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2}{s(s-1)}}$$

$$\boxed{\frac{1}{s(s-1)}\sum_{ij}(r_i - r_j)^2 = 2R_s^2}$$

pues si coloco el origen en el CM de un cluster grande vemos que

$$\boxed{\sum_{ij}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \sum_{ij}(\mathbf{r}_i)^2 + \sum_{ij}(\mathbf{r}_j)^2 + \cancel{2\sum_{ij}(\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j)} = 2s\sum_i(\mathbf{r}_i)^2}$$

luego se reporduce R_s^2

-

$$\boxed{\frac{1}{s(s-1)}\sum_{ij}(r_i - r_j)^2 = \frac{1}{s(s-1)}2s\sum_i r_i^2 \cong 2R_s^2}$$

Sobre un cluster podemos definir la funcion de correlacion, como se hizo para Bethe,

$g(r)$

La probabilidad que un nodo a una distancia r de un nodo ocupado este ocupado y pertenezca al mismo cluster

El numero de nodos promedio unidos al *origen* es $\sum_r g(r)$.

$$\left\{\sum_r g(r) = S\right.$$

-

Por otro lado el numero medio de nodos unidos al *origen* es :

1) la probabilidad de que un nodo pertenezca a un cluster de tamaño s es $\boxed{\frac{n_s s}{\sum_s n_s s}}$

2)y entonces el promedio es

$$\boxed{S = \sum_s s\left[\frac{n_s s}{\sum_s n_s s}\right]}$$

pero como

$$\boxed{\sum s n_s = p}$$

resulta

$$\boxed{\sum s^2 n_s / p}$$

entonces

$$\frac{\sum s^2 n_s}{p} = \sum_r g(r) \Rightarrow \boxed{\sum s^2 n_s = p \sum_r g(r) = pS}$$

con $S = \frac{\sum s^2 n_s}{p}$

-

Como siempre hay que tener cuidado con las sumas que pueden contener terminos divergentes y en el caso $p > p_c$ esto puede ocurrir →

entonces hay que separar la contribucion del cluster infinito sobre p_c.

Distancia de correlación

Cuando se define un funcion de correlacion , hay que estudiar la distancia de correlacion ξ.

$$\boxed{\xi^2 = \frac{\sum_r r^2 g(r)}{\sum_r g(r)}}$$

Es un promedio de distancias entre dos nodos que pertenecen al mismo cluster

Que puede ser definida en terminos del radio de giro.

$$\boxed{\frac{1}{s(s-1)} \sum_{ij} (r_i - r_j)^2 = \frac{1}{s(s-1)} 2s \sum_i r_i^2 \cong 2R_s^2}$$

además

$$\boxed{pS = \sum_s s^2 n_s = p \sum_r g(r)}$$

i) $2R_s^2$ es la distancia cuadratica media entre 2 nodos de un cluster de tamaño s.

ii) en un cluster hay s nodos

iii) un nodo pertenece a un cluster de tamaño s con un proba $n_s s$ entonces

$$\boxed{\xi^2 = \frac{\sum_s 2R_s^2 s n_s s}{\sum s n_s s} = 2\frac{\sum_s R_s^2 n_s s^2}{\sum n_s s^2}}$$

Luego ξ viene asociado al tamaño de los clusters que dan la contribucion mas importante al segundo momento de la distribución de los tamaños de los clusters, entonces debería ser

$$\boxed{\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}}$$

recordar

$$S \propto \sum s^2 n_s$$

$$p = \sum s n_s$$

$$S = \frac{\sum s^2 n_s}{\sum s n_s}$$

Hagamos una pequeña excursión por ámbitos impensados

Como varia R_s en el umbral de percolacion?

-Supongamos un problema de 2 dimensiones en una red cuadrada

-Supongamos que tomamos el cluster mas grande

-Supongamos que trabajamos sobre una lattice cuadrada de tamaño L^2

o en su defecto que tomamos una red infinta y la observamos sobre una ventana de tamaño L^2.

-Variamos L y calculamos la masa en el cuadrado $M(L)$ (dada la topologia)

El resultado es :

Tiene tamaño finito!

$$M(L) \underset{L\to\infty}{\sim} \begin{cases} \ln L & para \quad p < p_c \\ L^D & para \quad p = p_c \\ L^E & \end{cases}$$

Para el caso bidimensional cuadrado

$D = 1.89$ y $E \sim d$ → D<d !

con $d = 2$ dimension del problema

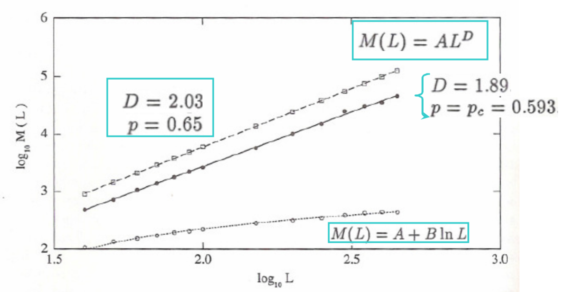
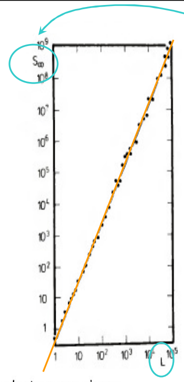


FIGURE 7.4: The mass of the largest cluster as a function of the linear dimension L of the quadratic lattice. Filled circles are for $p = p_c = 0.593$. The solid line is $M(L) = AL^D$ with $D = 1.89$. For $p = 0.65$ (open boxes) a fit (dashed line) gives $D = 2.03$. The results for $p = 0.5$, i.e., below p_c, have been fitted to the form $M(L) = A + B \ln L$, shown as the dotted line through the open circles.

Red Triangular

p_c=0.5

D=91/48=1.895



tamaño del cluster percolante en el umbral de percolacion en terminos de la dimension lineal L de la red

Entonces para nuestros clusters asumimos

$$R_s \propto s^{1/D} \qquad (p = p_c \, ; s \gg 1)$$

Volvemos

Ahora volvemos al comportamiento de ξ :

$$\boxed{\xi^2 = 2\frac{\sum_s R_s^2 n_s s^2}{\sum n_s s^2}}$$

-

$\sum n_s s^2$ es el momento de orden 2 de la distribucion de n_s diverge como $\boxed{|p-p_c|^{-\gamma}, \text{ con } \gamma = (3-\tau)/\sigma}$

-

Entonces el numerador seria un momento del orden $\boxed{k = 2 + 2/D}$ y entonces diverge con un exponente $\boxed{(3-\tau+2/D)/\sigma}$

Por lo tanto el cociente expresado en ξ^2 diverge como $\boxed{2/\sigma D}$, pues tengo: $\boxed{(3-\tau+2/D)/\sigma - (3-\tau)/\sigma = \frac{2}{D\sigma}}$

-

Pero segun vimos tambien diverge con ν $\boxed{\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}}$ de donde

entonces $\boxed{\xi^2 \propto |p-p_c|^{-2\nu}}$

luego $\boxed{1/D = \sigma\nu}$

-

Para la Bethe lattice $D = 4$ para toda p y esto corresponde a $d \sim \infty$

Algunos valores de ν

red	ν
$2d$	$4/5$
$3d$	$\lessapprox 0.9$
Bethe	$1/2$

Veamos ahora que pasa para $d = 3$

≈ 0

s grande $\Rightarrow$ t grande

a) sea $p \sim 1$;

como $n_s = \sum_t g_{st} p^s (1-p)^t \Rightarrow$

los perimetros relevantes son los mas pequeños, o sea las estructuras mas compactas o sea que no tienen nodos vacios.

entonces esperamos $R_s \sim s^{1/3}$ o sea diferente de lo que corresponde a $p = p_c$ que es $\sigma\nu$ con $\sigma = 0.45$ y $\nu = 0.88$

o sea $0.88 \cdot 0.45 = 0.396 \sim 0.4$,

en p_c $\quad R_s \propto s^{1/D} = s^{\sigma\nu}$

en general el comportamiento por encima de p_c corresponde a estructuras sin agujeros y $D = d$

-

b) por debajo de p_c no hay resultados exactos generales pero se ha encontrado $D = 2$

Crossover

-

El comportamiento critico esta asociado a la variable divergente ξ.

$$s_\xi \propto \xi^D \propto (p-p_c)^{-D\nu} \propto (p-p_c)^{-1/\sigma}$$

Habíamos escrito $\quad n_s \propto s^{-\tau} \exp(-cs) \quad \Big\{ \quad$ si $\; s << s_\xi \rightarrow n_s \propto s^{-\tau}$

como $n_s \propto s^{-\tau} f[(p-p_c)s^\sigma]$, con $f(z)$ que decae rapidamente para $|z| \gg 1$

como $s_\xi \propto \frac{1}{c}$

entonces $s_\xi \propto |(p-p_c)|^{-1/\sigma}$ es un umbral de cuttoff marcando el limite del decaimiento power al exponencial

-

Asi que aca lo importante es la existencia de una distancia caracteristica sobre la cual cambia "el comportamiento" del sistema.

Por ejemplo cuando se vio que [para $p \neq p_c$]

$$g(r) \propto \exp(-r/\xi)$$

donde ξ es la escala del problema (siempre que hay una exponencial debemos tener una variable adimensional).

Tambien vimos que ξ diverge en el punto critico y el comportamiento de la funcion de correlacion es tipo ley de potencias con

$$g(r) \propto r^{-(d-2+\eta)}$$

El Cluster infinito en el umbral de percolacion

i) Por debajo de p_c no hay cluster percolante.

ii) Por encima de p_c si hay cluster percolante.

iii)cuando nos acercamos al umbral $\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}$

Como las cuentas se realizan sobre redes finitas vemos, que pasa en terminos de L.

Ya vimos como va la masa del mayor fragmento para los tres regimenes que nos interesan.

En particular en p_c se verificaba que con L la dimension de la red o ventana

$R_s \propto L$	$L \propto s^{1/D}$	$s \propto L^D$

Debajo de p_c el maximo cluster es finito ocurre que al crecer L supera el tamaño tipico ξ

(la ventan con la que lo miro)

y cuando L sigue creciendo la masa contenida mantiene cte y la densidad de nodos decrece.

La dimension fractal de estos clusters es 0.

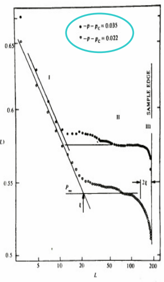
Por encima de p_c la masa crece con L de la forma L^d

En p_c la masa va como L^D .

En esta figura se muestra que pasa con las propiedades del maximo fragmento por, apenas, encima del unbral de percolacion en una red cuadrada.

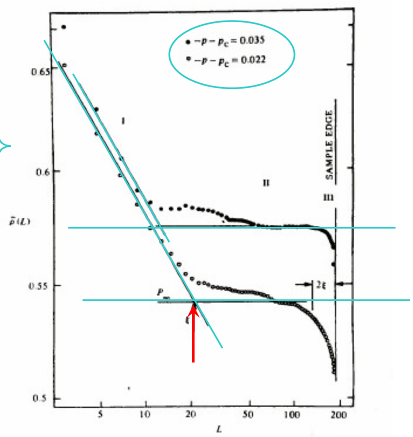
(de esta forma tengo cluster infinito no demasiado compacto)

$p_c = 0.592746$. (Observar que el grafico es linar-log pero se grafica el log de $\tilde{p}$).



Se grafica la densidad ρ en terminos L.

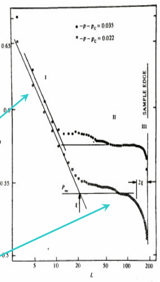
$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{L^D}{L^d} = L^{(D-d)}$$



Vemos que hay dos regimenes bien diferenciados e indica que la Masa va como

-Por debajo de la distancia de correlacion ξ va como L^D. Las rectas van como $D-d = -0.1$

-Por encima de ξ alcanzan una cte (mientras estemos mas o menos lejos de la superficie) o sea $D-d = 0$

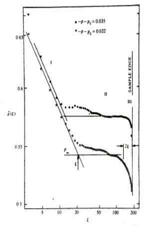


Como se compatibilizan estos dos regimenes?

Para $L < \xi \Rightarrow M(L,\xi) \propto L^D$

Para $L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.



$$P = \frac{\#\,\text{nodos} \in C_\infty}{\#\,\text{nodos}}$$

Pero para este ultimo caso si dividimos el volumen en celdas de volumen $(L/\xi)^d$ para cada una de ellas $M_i \propto \xi^D$ y la masa total es entonces $M \propto (L/\xi)^d \xi^D$ o sea

$$M \propto \left(\frac{L}{\xi}\right)^d \xi^D \propto PL^d$$

Pero ademas $P \propto (p-p_c)^\beta$ y $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$ de donde

$$M \propto (L/\xi)^d \xi^D \propto PL^d$$

Pero ademas $P \propto (p-p_c)^\beta$ y $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$ de donde

$$(p-p_c)^\beta \propto \xi^{D-d} \propto [(p-p_c)^{-\nu}]^{D-d}$$

De donde

$$\nu(d-D) = \beta \;\Rightarrow\; D = d - \beta/\nu$$

De aqui tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de ξ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresion.

Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente L/ξ, luego

$$M(L,\xi) = L^D m(L/\xi)$$

con $m(L/\xi) = m(x)$ y si $x \ll 1$, $m(x) = cte.$ y para $x \gg 1$, $m(x) \propto x^{d-D} = (L/\xi)^{d-D}$.

O sea que tenemos una relacion de escala para la masa contenida en un dado volumen.

Esto es una expresion de escala para una variable que en general es $f(x,y) = x^{-A} g(x/y^B)$

Otra forma de escribirlo es (con $\xi = (p-p_c)^{-\nu}$)

$$M(L,(p-p_c)) = L^D m'((p-p_c)L^{1/\nu})$$

o tambien

$$M(L,(p-p_c)) = (p-p_c)^{-x} m''((p-p_c)L^{1/\nu})$$

donde $m''\ldots$

Funciones homogeneas

$F(\lambda x)$ es homogenea para todo $\lambda \Rightarrow$

$$F(\lambda x) = g(\lambda)F(x)$$

Donde $g(\lambda)$ sera tal que

$$F(\lambda\mu x) = g(\lambda\mu)F(x) = g(\lambda)F(\mu x) = g(\lambda)g(\mu)F(x) \Rightarrow$$

$$g(\lambda\mu) = g(\lambda)g(\mu)$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial\mu}g(\lambda\mu) = \lambda g'(\lambda\mu) = g(\lambda)g'(\mu)$$

Si $\mu = 1$ y $g'(\mu) = p$

$$\lambda g'(\lambda) = pg(\lambda)$$

si $g(\lambda) = \lambda^p \Rightarrow g'(\lambda) = p\lambda^{(p-1)} = p\lambda^p/\lambda$ etc.

$$g(\lambda) = \lambda^p$$

Entonces

$$F(\lambda x) = \lambda^p F(x)$$

Para dos variables

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x,y)$$

si ahora defino $\lambda = y^{\frac{-1}{q}}$

$$y^{\frac{1}{q}} f(y^{\frac{-p}{q}} x, 1) = f(x,y)$$

De donde la funcion homogenea de dos variables depende de (x,y) via $y^{\frac{-p}{q}} x$

Esto es una expresion de escala para una variable que en general es $\boxed{f(x,y) = x^{-A} g(x/y^B)}$

Otra forma de escribirlo es (con $\xi = (p-p_c)^{-\nu}$)

$$M(L,(p-p_c)) = L^D m'((p-p_c)L^{1/\nu})$$

o tambien

$$M(L,(p-p_c)) = (p-p_c)^{-x} m''((p-p_c)L^{1/\nu})$$

donde $m'' \ldots$

Si en vez de fijarnos en la masa nos fijamos en el R_s haciendo un calculo similar (expresando la masa en terminos de R_s) obtendremos

$$\boxed{R_s = s^{\rho} h(x) = s^{\rho} h((p-p_c)s^{\sigma})}$$

Con

$h(x) = cte$ para $|x| << 1$

$h(x) = x^{(\rho'-\rho)/\sigma}$ para $x << -1$

$h(x) = x^{(\rho''-\rho)/\sigma}$ para $x >> 1$