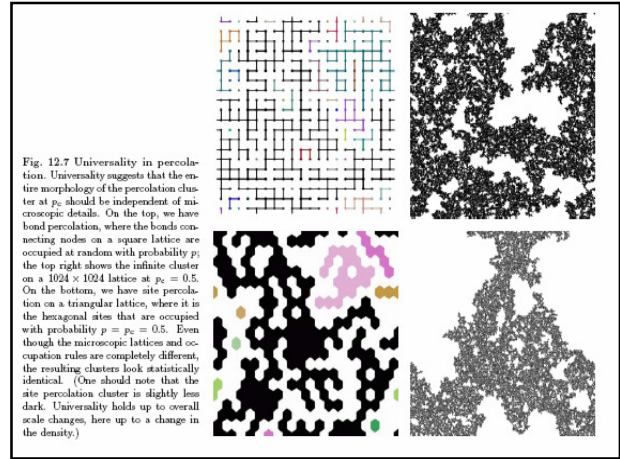
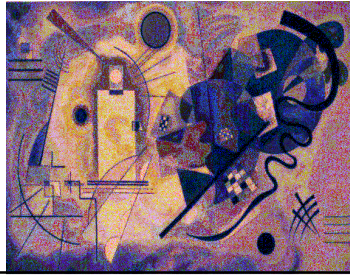


Estructura + Renormalizacion

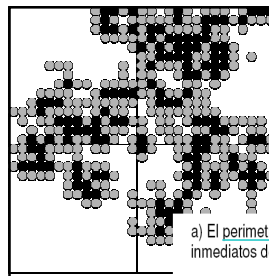
侍



Estructura de los fragmentos

Algunas propiedades de los clusters

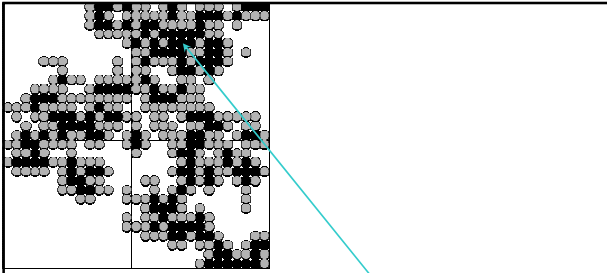
- a) perimetro
- b) superficie
- c) radio



a) El perimetro l es el numero de nodos vacios que son vecinos inmediatos del cluster.

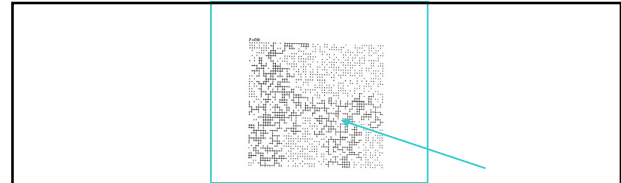
b) El tamaño o masa s del cluster es el conjunto de nodos ocupados del cluster

c) Tambien definimos la superficie A que es el conjunto de nodos del cluster que son vecinos del perimetro



d) Finalmente tenemos el Bulk B que es el conjunto de nodos del cluster que no son vecinos del perímetro.

Es este perímetro lo mismo que una superficie usual? es decir escala como s^{1-d_f} ?



En esta figura $p = 0.6$ que es muy cercana por encima a p_c .

Cuando miramos a un cluster en la **region crítica** observamos que "esta lleno de agujeros".

Estos nodos no ocupados contribuyen al perímetro y si podemos

tenemos que tomar en cuenta los perímetros "interiores" generados por los agujeros.

Al definir una densidad típica de agujeros interiores tendremos que el perímetro \dagger sera proporcional a la masa del cluster

Esto es así y resulta entonces que

$$\dagger \propto s \quad (s \rightarrow \infty)$$

Radio de un cluster

Hay varias posibles definiciones :

-Sea $r_0 = \frac{1}{s} \sum_1^s r_i$ el centro de masa del sistema, entonces el radio de giro esta dado por

$$R_g^2 = \sum \frac{(r_i - r_0)^2}{s}$$

Esto vale para un cluster y se promedia sobre todos los clusters de tamaño s .

-La distancia media entre todos los pares de nodos de un cluster es

$$\frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{(r_i - r_j)^2}{s(s-1)}$$

$$\sum_{i < j} \frac{(r_i - r_j)^2}{s(s-1)} = 2R_g^2$$

pues si coloco el origen en el CM de un cluster grande vemos que

$$\sum_{ij} (r_i - r_j)^2 = \sum_{ij} (r_i)^2 + \sum_{ij} (r_j)^2 + 2 \sum_{ij} (r_i \cdot r_j) = 2s \sum_i (r_i)^2$$

luego se reproduce R_s^2

$$\frac{1}{s(s-1)} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 = \frac{1}{s(s-1)} 2s \sum_i r_i^2 \cong 2R_s^2$$

Sobre un cluster podemos definir la funcion de correlacion, como se hizo para Bethe,

$$g(r)$$

La probabilidad que un nodo a una distancia r de un nodo ocupado este ocupado y pertenezca al mismo cluster

El numero de nodos promedio unidos al origen es $\sum_r g(r)$. $\left\{ \sum_r g(r) = S \right.$

Por otro lado el numero medio de nodos unidos al origen es :

1) la probabilidad de que un nodo pertenezca a un cluster de tamaño s es

$$n_s s / \sum n_s$$

$$\frac{n_s S}{\sum n_s S}$$

2) y entonces el promedio es

$$\sum_s [n_s s / \sum n_s] = \sum_r g(r) = S$$

pero como

$$\sum n_s s = p$$

Distancia de correlacion

Cuando se define un funcion de correlacion, hay que estudiar la distancia de correlacion ξ .

$$\xi^2 = \frac{\sum_i r_i^2 g(r)}{\sum_i g(r)}$$

Es un promedio de distancias entre dos nodos que pertenecen al mismo cluster

Que puede ser definida en terminos del radio de giro.

$$\frac{1}{s(s-1)} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 = \frac{1}{s(s-1)} 2s \sum_i r_i^2 \cong 2R_s^2$$

ademas

$$pS = \sum_s s^2 n_s = p \sum_r g(r)$$

resulta

$$\sum s n_s = p$$

entonces

$$\sum s^2 n_s / p = \sum_r g(r) = S$$

$$\frac{\sum s^2 n_s}{p} = \sum_r g(r) \Rightarrow \sum s^2 n_s = p \sum_r g(r) = pS$$

$$\text{con } S = \frac{\sum s^2 n_s}{p}$$

Como siempre hay que tener cuidado con las sumas que pueden contener terminos divergentes y en el caso $p > p_c$ esto puede ocurrir →

entonces hay que separar la contribucion del cluster infinito sobre p_c .

i) $2R_s^2$ es la distancia cuadrática media entre 2 nodos de un cluster de tamaño s .

ii) en un cluster hay s nodos

iii) un nodo pertenece a un cluster de tamaño s con un proba n_s , entonces

$$\xi^2 = \frac{\sum_s 2R_s^2 s n_s}{\sum_s s n_s} = 2 \frac{\sum_s R_s^2 n_s s^2}{\sum_s n_s s^2}$$

Luego ξ viene asociado al tamaño de los clusters que dan la contribucion mas importante al segundo momento de la distribucion de los tamaños de los clusters, entonces debería ser

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$$

recordar

$$S \propto \sum s^2 n_s$$

$$p = \sum s n_s$$

$$S = \frac{\sum s^2 n_s}{\sum s n_s}$$

Como varia R_s en el umbral de percolacion?

- Supongamos un problema de 2 dimensiones en una red cuadrada
- Supongamos que tomamos el cluster mas grande
- Supongamos que trabajamos sobre una lattice cuadrada de tamaño L^2

o en su defecto que tomamos una red infinita y la observamos sobre una ventana de tamaño L^2 .

-Variamos L y calculamos la masa en el cuadrado $M(L)$ (dada la topologia)

El resultado es :

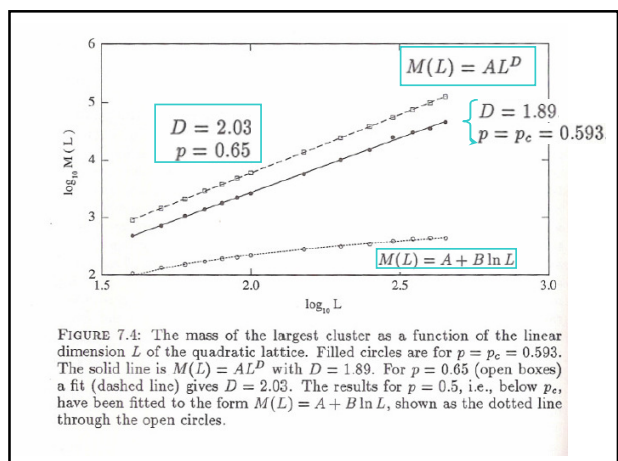
$M(L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim}$	$\ln L$	para $p < p_c$
	L^D	para $p = p_c$
	L^E	

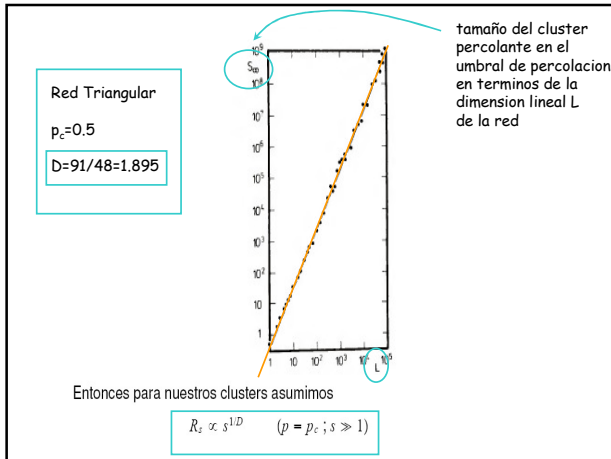
Tiene tamaño finito!

Para el caso bidimensional cuadrado

$$D = 1.89 \text{ y } E \sim d \longrightarrow D < d !$$

con $d = 2$ dimension del problema





Ahora volvemos al comportamiento de ξ :

recordemos

$$\xi^2 = 2 \frac{\sum_s R_s^2 n_s s^2}{\sum_s n_s s^2}$$

$$M_k \propto e^{\tau-1-k} \propto |p-p_c|^{(k-1)/\sigma}$$

$$R_s \propto s^{1/D} \quad (p = p_c; s \gg 1)$$

$\sum n_s s^2$ es el momento de orden 2 de la distribucion de n_s diverge como $|p-p_c|^{-\gamma}$, con $\gamma = (3-\tau)/\sigma$

Entonces el numerador seria un momento del orden $k = 2 + 2/D$ y entonces diverge con un exponente $(3-\tau+2/D)/\sigma$

R_s^2

Por lo tanto el cociente expresado en ξ^2 diverge como $2/\sigma D$, pues tengo: $(3-\tau+2/D)/\sigma - (3-\tau)/\sigma = \frac{2}{\sigma D}$

Pero segun vimos tambien diverge con ν : $\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}$ de donde

$$1/D = \sigma \nu$$

Para la Bethe lattice $D = 4$ para toda p y esto corresponde a $d \sim \infty$

Algunos valores de ν

red	ν
$2d$	$4/5$
$3d$	≈ 0.9
Bethe	$1/2$

Veamos ahora que pasa para $d = 3$

a) sea $p \sim 1$; $(1-p)^t \Big|_{p=1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

como $n_s = \sum_i g_i p^i (1-p)^s \Rightarrow$

los perimetros relevantes son los mas pequeños, o sea las estructuras mas compactas o sea que no tienen nodos vacíos.

entonces esperamos $R_s \sim s^{1/3}$ o sea diferente de lo que corresponde a $p = p_c$ que es σv con $\sigma = 0.45$ y $v = 0.88$

o sea $0.88 \cdot 0.45 = 0.396 \sim 0.4$,

en general el comportamiento por encima de p_c corresponde a estructuras sin agujeros y $D = d$

b) por debajo de p_c no hay resultados exactos generales pero se ha encontrado $D = 2$

Asi que aca lo importante es la existencia de una distancia característica sobre la cual cambia "el comportamiento" del sistema.

Por ejemplo cuando se vio que [para $p \neq p_c$]

$$g(r) \propto \exp(-r/\xi)$$

donde ξ es la escala del problema (siempre que hay una exponencial debemos tener una variable adimensional).

Tambien vimos que ξ diverge en el punto critico y el comportamiento de la funcion de correlacion es tipo ley de potencias con

$$g(r) \propto r^{-(d-2+\eta)}$$

El Cluster infinito en el umbral de percolacion

i) Por debajo de p_c no hay cluster percolante.

ii) Por encima de p_c si hay cluster percolante.

iii) cuando nos acercamos al umbral $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$

Como las cuentas se realizan sobre redes finitas vemos, que pasa

en terminos de L .

Ya vimos como va la masa del mayor fragmento para los tres regimenes que nos interesan.

En particular en p_c se verificaba que con L la dimension de la red o ventana

$$R_s \propto L \quad L \propto s^{1/D}$$

Debajo de p_c el maximo cluster es finito ocurre que al crecer L supera el tamaño tipico ξ

y cuando L sigue creciendo la masa contenida mantiene cte y la densidad de nodos decrece.

La dimension fractal de estos clusters es 0.

Por encima de p_c la masa crece con L de la forma L^d

En p_c la masa va como L^D .

En esta figura se muestra que pasa con las propiedades del maximo fragmento por, apenas, encima del unbral de percolacion en una red cuadrada.

$p_c = 0.592746$. (Observar que el grafico es linar-log pero se grafica el log de \bar{p}).

Se grafica la densidad ρ en terminos L .

$\rho = \frac{M}{V}$

$\frac{L^D}{L^d} = L^{(D-d)}$

$\bar{p} \sim L$

p_c

2ξ

$p - p_c = 0.035$

$p - p_c = 0.022$

I

II

III

SAMPLE EDGE

Crossover

El comportamiento critico esta asociado a la distancia divergente ξ

$$s_\xi \propto \xi^D \propto (p - p_c)^{-D\nu} \propto (p - p_c)^{-1/\sigma}$$

Como vimos, el comportamiento para escalas menores que ξ el comportamiento es del tipo "critico", entonces :

$$n_s \propto s^{-\tau}$$

Esta es la situación para:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_s \ll \xi \\ s \ll s_\xi \end{array} \right.$$

Para $s \gg s_\xi$ tenemos el decaimiento exponencial

Vemos que hay dos regimenes bien diferenciados e indica que la Masa va como

-Por debajo de la distancia de correlacion ξ va como L^D . Las rectas van como $D - d = -0.1$

-Por encima de ξ alcanzan una cte (mientras estemos mas o menos lejos de la superficie) o sea $D - d = 0$

Como se compatibilizan estos dos regimenes?

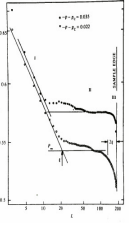
Para $L < \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D$

Para $L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.

Si dividimos el volumen L^d
 En celdas de volumen ξ^d
 La masa en cada celda es ξ^{D-d}
 Tendremos $(L/\xi)^d$ celdas
 La masa total es $M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d}$

Pero además $P \propto (p-p_c)^\beta$ y $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$ de donde



$M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d} \propto PL^d$

$M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d} \propto PL^d$

Pero además $P \propto (p-p_c)^\beta$ y $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$ de donde

$(p-p_c)^\beta \propto \xi^{D-d} \propto [(p-p_c)^{-\nu}]^{D-d}$

De donde

$\nu(d-D) = \beta \Rightarrow D = d - \beta/\nu$

De aquí tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de ξ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresión.

Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente L/ξ luego

$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$

con $m(L/\xi) = m(x)$ y si $x \ll 1$, $m(x) = cte.$ y para $x \gg 1$, $m(x) \propto x^{d-D} = (L/\xi)^{d-D}$.

O sea que tenemos una relación de escala para la masa contenida en un dado volumen.

$x = \frac{L}{\xi}$

$x \ll 1 \Rightarrow L \ll \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D \Rightarrow m(x) = cte$

$x \gg 1 \Rightarrow L \gg \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^d \Rightarrow m(x) = L^{d-D} \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D \cdot L^{d-D} = L^d$

Finalmente

$M(L, \xi) \propto L^D m\left(\frac{L}{\xi}\right)$

Esto es una expresión de escala para una variable que en general es $f(x,y) = x^{-\alpha} g(x/y^\beta)$

Otra forma de escribirlo es (con $\xi = (p-p_c)^{-\nu}$)

$M(L, (p-p_c)) = L^D m'((p-p_c)L^{1/\nu})$

o también

$M(L, (p-p_c)) = (p-p_c)^{-\alpha} m''((p-p_c)L^{1/\nu})$

donde $m'' \dots$

Funciones homogeneas

$F(\lambda x)$ es homogenea para todo $\lambda \Rightarrow$

$$F(\lambda x) = g(\lambda)F(x)$$

Donde $g(\lambda)$ sera tal que

$$F(\lambda \mu x) = g(\lambda \mu)F(x) = g(\lambda)F(\mu x) = g(\lambda)g(\mu)F(x) \Rightarrow$$
$$g(\lambda \mu) = g(\lambda)g(\mu)$$

Entonces

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda \mu) = \lambda g'(\lambda \mu) = g(\lambda)g'(\mu)$$

Si $\mu = 1$ y $g'(\mu) = p$

$$\lambda g'(\lambda) = pg(\lambda)$$

si $g(\lambda) = \lambda^p \Rightarrow g'(\lambda) = p\lambda^{p-1} = p\lambda^p/\lambda$ etc.

$$g(\lambda) = \lambda^p$$

Entonces

$$F(\lambda x) = \lambda^p F(x)$$

Para dos variables

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x, y)$$

si ahora defino $\lambda = y^{-\frac{q}{p}}$

$$y^{-\frac{q}{p}} f(y^{\frac{p}{p}} x, 1) = f(x, y)$$

De donde la funcion homogenea de dos variables depende de (x, y) via $y^{-\frac{q}{p}} x$

$$M(L, \xi) \propto L^p m\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

Esto es una expresion de escala para una variable que en general es $f(x, y) = x^{-\alpha} g(x/y^\beta)$

Otra forma de escribirlo es (con $\xi = (p - p_c)^{-\alpha}$)

$$M(L, (p - p_c)) = L^p m'((p - p_c)L^{1/\nu})$$

o tambien

$$M(L, (p - p_c)) = (p - p_c)^{-\alpha} m''((p - p_c)L^{1/\nu})$$

donde $m'' \dots$

Si en vez de fijarnos en la masa nos fijamos en el R_c , haciendo un calculo similar (expresando la masa en terminos de R_c) obtendremos

$$\bar{R}_c = s^\rho h(x) = s^\rho h((p - p_c) s^\sigma)$$

Con

$$\begin{aligned} h(x) &= \text{cte para } |x| \ll 1 \\ h(x) &= x^{(d-p)\nu} \text{ para } x \ll -1 \\ h(x) &= x^{(d-p)\nu} \text{ para } x \gg 1 \end{aligned}$$

Renormalizacion de celda pequeña

Vimos que aparece una distancia característica ξ que es la distancia de correlacion.

Esta distancia de correlacion me marca el cambio de comportamiento (como vimos del comportamiento en la vecindad de p_c)

$$\xi = (p - p_c)^{-\nu}$$

Vimos que para

$$L < \xi, \rho(L) = M(L)/L^d \text{ va como } L^D/L^d \text{ o sea como } L^{-\beta\nu}, \text{ donde usamos que } D = d - \beta/\nu$$

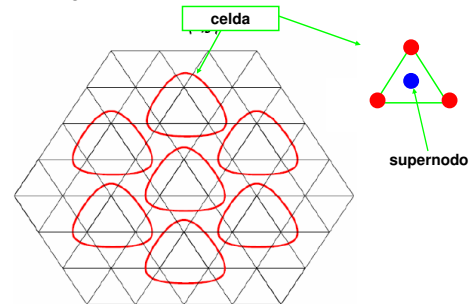
por otro lado

$$L > \xi \Rightarrow P \propto (p - p_c)^\beta$$

En el punto critico desaparece uno de estos comportamientos pues $\xi \rightarrow \infty$

Renormalizacion en percolacion

Sea una red triangular



En el punto crítico el cluster percolante es autosimilar (estadísticamente) como vemos esto?

- Supongamos un proceso en el cual dividimos nuestra lattice en celdas y a cada celda le asignamos estado ocupado o vacío con algún criterio.

- Pensamos en la red triangular, formamos celdas con tres nodos que forman triángulos. El resultado de aplicar esto sobre toda la red y el resultado es una nueva red triangular.

En este caso estamos escalado con una "distancia típica" $b = \sqrt[3]{3}$ pues $b^2 = 3$ que es el número de nodos que contiene la celda.

$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estarán ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupación de estos nuevos supernodos es

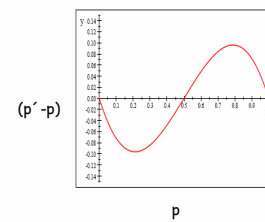
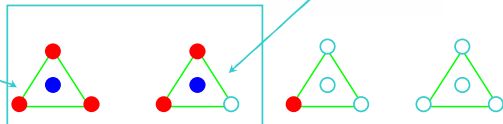
$$p' = p^3 + 3p^2(1-p)$$

Donde

p^3 corresponde a la proba de tener los 3 nodos originales ocupados

$p^2(1-p)$ es la proba de tener 2 ocupados y 1 vacío. El 3 enfrente corresponde a las 3 posibles formas de hacer esto

Si estudiamos $(p' - p)$ vemos que:



De donde se ve que p' es invariante para $p = 0$ y $p = 1$, que son triviales (la vacía queda vacía y la llena queda llena).

Pero hay otro punto interesante que es $p = 0.5 = p_c$ es decir el punto critico donde esta el cluster percolate que es una fractal es tambien invariante!

A la p invariante la llamamos punto fijo p^*



$$\text{En } p_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \rightarrow \infty \Rightarrow \forall L \rightarrow L < \xi \Rightarrow \\ M(L) \propto L^D \end{array} \right.$$

Si se escalea todo en b , debe seguir valiendo la relacion pues

$$\forall L \rightarrow L < \xi \Rightarrow \text{si } L \rightarrow L/b$$

$$M(L/b) \propto (L/b)^D$$

Entonces

$$M(L) \propto L^D = b^D (L/b)^D = b^D M(L/b) \Rightarrow$$

$M(L)$ es una funcion homogenea y la unica forma posible es $M(L) \propto L^D$

Cuando se escalea, todas las escalas deberian cambiar en b

Para la red original

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

De done

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \text{ de donde}$$

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}$$

$$\begin{aligned} \ln(b) + \ln(|p' - p_c|^{-\nu}) &= \ln(|p - p_c|^{-\nu}) \\ \Rightarrow -\nu[\ln(p' - p_c) - \ln(p - p_c)] &= \ln(b) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln[(p' - p_c)/(p - p_c)]}{\ln(b)} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

$$\text{como } (p' - p_c)/(p - p_c) = dp'/dp = \lambda$$

Volviendo al caso de la red triangular en celda pequena obtenemos que podemos escribir p' en un entorno de p^* como

$$p' = p^* + (dp'/dp)(p - p^*) + O(p - p^*) = p^* + \lambda(p - p^*) + O(p - p^*)$$

Calculando λ obtenemos:

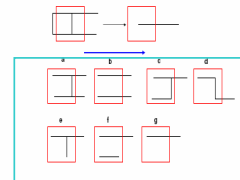
$$\lambda = (dp'/dp) = 3p^2 + 6p(1-p) - 3p^2 = 6p(1-p)$$

En $p_c = 1/2$ obtenemos $3/2$ de donde

$$\frac{1}{v} = \frac{\ln \lambda}{\ln b} = \frac{\ln(1.5)}{\ln(\sqrt{5})} = 0.73814 \Rightarrow v = \frac{1}{0.73814} = 1.3548$$

Resulta que se parece al valor exacto $v = 4/3$ (J. Phys.A12,(1979),1857.)

Precolación de links en la red cuadrada 2d

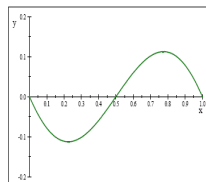


- a) p^5
- b) $p^4(1-p)$
- c) $4p^4(1-p)$
- d) $2p^3(1-p)^2$
- e) $2p^3(1-p)^2$
- f) $4p^3(1-p)^2$
- g) $2p^2(1-p)^3$

Entonces la proba de conectar las dos celdas por bonds es

$$p' = p^5 + 5p^4(1-p) + 8p^3(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 = p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)$$

$$; p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2) - p \Rightarrow$$



De donde $p^* = 1/2$

Como $b = 2$

resulta que

$$p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{dp'}{dp} = p^2(6p^2 - 10p + 2) + 2p(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)$$

$$= 2p(5p^3 - 10p^2 + 3p + 2)$$

en $1/2$

$$2(1/2)(5(1/2)^3 - 10(1/2)^2 + 3(1/2) + 2) = \frac{13}{8} = \lambda$$

Entonces

$$1/v = \ln(\lambda)/\ln(b) = \ln(13/8)/\ln(2) = 0.70044$$

de donde

$$v = \frac{1}{0.70044} = 1.4277 \sim 4/3$$

Entonces podemos hacer el siguiente analisis: (finite size scaling?)

Si estamos en el punto crítico la transformación de escala se escribe \rightarrow

Al pasar a "super-nodos" la masa se reduce basicamente en b^D

$$M(L) = b^D M(L/b)$$

o tambien $M(L)/b^D = M(L/b)$

Esta transformación se puede aplicar l veces:

$$M(L) = b^{lD} M(L/b^l)$$

puede hacerse con cualesquiera cantidad de pasos !?

Pero que pasa si ξ es finito?

$$M(L, \xi) = b^{lD} M(L/b^l, \xi/b^l)$$

a) Si $L \ll \xi$ se itera hasta que $b^l = L$ y toda la lattice se reduce a un punto

$$M(L, \xi) = L^D M(1, \infty) \propto L^D$$

b) Si $L \gg \xi$ y $p > p_c$, se itera hasta que $b^l = \xi$ pues luego se acaba la autosimilaridad, entonces $\xi_{eff} = \xi/b^l = 1$ Con $p > p_c \Rightarrow p_{eff}$ se hara del orden de 1 y el sistema se vera uniforme

En este caso $b^{lD} \rightarrow \xi^{lD}$ y $M(L/b^l, \xi/b^l) \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^d$ pues el sistema es "uniforme"

$$M(L, \xi) = \xi^{lD} (L/\xi)^d$$

c) si $p < p_c$, la p_{eff} sera casi 0 y $M(x, 1)$ corresponde a grandes lattice animals y entonces $M(L, \xi) = \xi^{lD} (L/\xi)^{D_0}$ con D_0 la dimension fractal de estos animales.

Esto se llama "relaciones de finite size scaling."