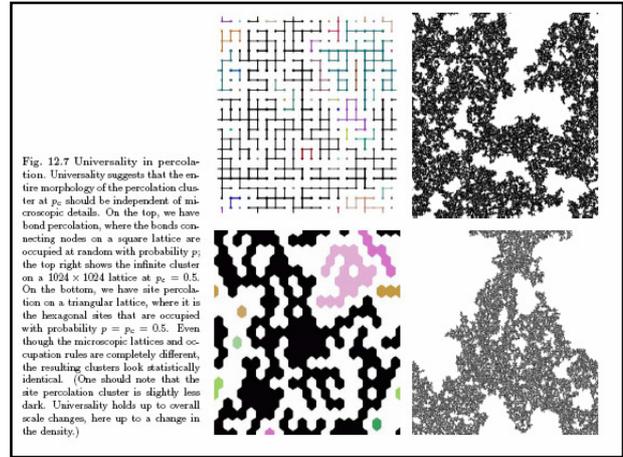
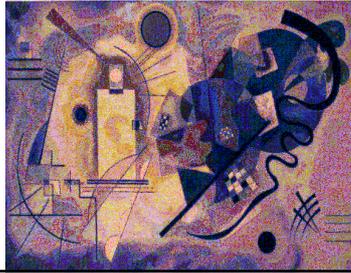


# Estructura + Renormalizacion

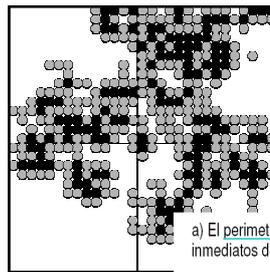
侍



## Estructura de los fragmentos

Algunas propiedades de los clusters

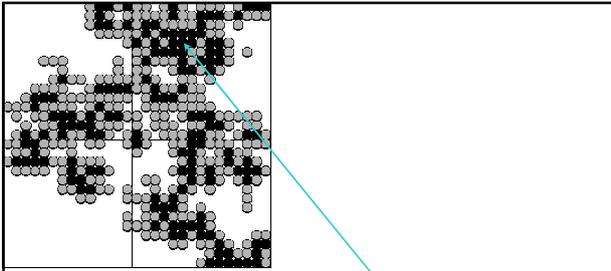
- a) perimetro
- b) superficie
- c) radio



a) El perimetro  $l$  es el numero de nodos vacios que son vecinos inmediatos del cluster.

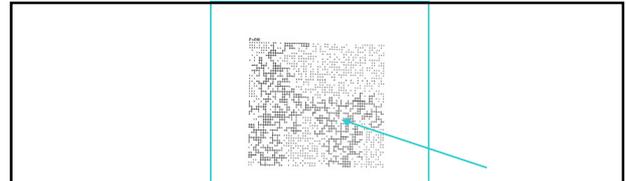
b) El tamaño o masa  $s$  del cluster es el conjunto de nodos ocupados del cluster

c) Tambien definimos la superficie  $A$  que es el conjunto de nodos del cluster que son vecinos del perimetro



d) Finalmente tenemos el Bulk  $B$  que es el conjunto de nodos del cluster que no son vecinos del perímetro.

Es este perímetro lo mismo que una superficie usual? es decir escala como  $s^{1-d_f}$ ?



En esta figura  $p = 0.6$  que es muy cercana por encima a  $p_c$ .

Cuando miramos a un cluster en la **region crítica** observamos que "esta lleno de agujeros".

Estos nodos no ocupados contribuyen al perímetro y si podemos

tenemos que tomar en cuenta los perímetros "interiores" generados por los agujeros.

Al definir una densidad típica de agujeros interiores tendremos que el perímetro  $\dagger$  sera proporcional a la masa del cluster

Esto es así y resulta entonces que

$$\dagger \propto s \quad (s \rightarrow \infty)$$

### Radio de un cluster

Hay varias posibles definiciones :

-Sea  $r_0 = \frac{1}{s} \sum_1^s r_i$  el centro de masa del sistema, entonces el radio de giro esta dado por

$$R_g^2 = \sum \frac{(r_i - r_0)^2}{s}$$

Esto vale para un cluster y se promedia sobre todos los clusters de tamaño  $s$ .

-La distancia media entre todos los pares de nodos de un cluster es

$$\frac{1}{2} \sum_{i < j} \frac{(r_i - r_j)^2}{s(s-1)}$$

$$\sum_{i < j} \frac{(r_i - r_j)^2}{s(s-1)} = 2R_g^2$$

pues si coloco el origen en el CM de un cluster grande vemos que

$$\sum_{ij} (r_i - r_j)^2 = \sum_{ij} (r_i)^2 + \sum_{ij} (r_j)^2 + 2 \sum_{ij} (r_i \cdot r_j) = 2s \sum_i (r_i)^2$$

luego se reproduce  $R_s^2$

$$\frac{1}{s(s-1)} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 = \frac{1}{s(s-1)} 2s \sum_i r_i^2 \cong 2R_s^2$$

Sobre un cluster podemos definir la funcion de correlacion, como se hizo para Bethe,

$$g(r)$$

La probabilidad que un nodo a una distancia r de un nodo ocupado este ocupado y pertenezca al mismo cluster

El numero de nodos promedio unidos al origen es  $\sum_r g(r)$ .  $\left\{ \sum_r g(r) = S \right.$

Por otro lado el numero medio de nodos unidos al origen es :

1) la probabilidad de que un nodo pertenezca a un cluster de tamaño s es

$$n_s S / \sum n_s$$

$$\frac{n_s S}{\sum n_s S}$$

2) y entonces el promedio es

$$\sum_s [n_s S / \sum n_s] = \sum_r g(r) = S$$

pero como

$$\sum n_s S = p$$

## Distancia de correlacion

Cuando se define un funcion de correlacion , hay que estudiar la distancia de correlacion  $\xi$ .

$$\xi^2 = \frac{\sum_i r_i^2 g(r)}{\sum_i g(r)}$$

Es un promedio de distancias entre dos nodos que pertenecen al mismo cluster

Que puede ser definida en terminos del radio de giro.

$$\frac{1}{s(s-1)} \sum_{i < j} (r_i - r_j)^2 = \frac{1}{s(s-1)} 2s \sum_i r_i^2 \cong 2R_s^2$$

ademas

$$pS = \sum_s s^2 n_s = p \sum_r g(r)$$

resulta

$$\sum s n_s = p$$

entonces

$$\sum s^2 n_s / p = \sum_r g(r) = S$$

$$\frac{\sum s^2 n_s}{p} = \sum_r g(r) \Rightarrow \sum s^2 n_s = p \sum_r g(r) = pS$$

$$\text{con } S = \frac{\sum s^2 n_s}{p}$$

Como siempre hay que tener cuidado con las sumas que pueden contener terminos divergentes y en el caso  $p > p_c$  esto puede ocurrir →

entonces hay que separar la contribucion del cluster infinito sobre  $p_c$ .

i)  $2R_s^2$  es la distancia cuadrática media entre 2 nodos de un cluster de tamaño  $s$ .

ii) en un cluster hay  $s$  nodos

iii) un nodo pertenece a un cluster de tamaño  $s$  con un proba  $n_s$ , entonces

$$\xi^2 = \frac{\sum_s 2R_s^2 s n_s}{\sum_s s n_s} = 2 \frac{\sum_s R_s^2 n_s s^2}{\sum_s n_s s^2}$$

Luego  $\xi$  viene asociado al tamaño de los clusters que dan la contribucion mas importante al segundo momento de la distribucion de los tamaños de los clusters, entonces debería ser

$$\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$$

recordar

$$S \propto \sum s^2 n_s$$

$$p = \sum s n_s$$

$$S = \frac{\sum s^2 n_s}{\sum s n_s}$$

### Como varia $R_s$ en el umbral de percolacion?

- Supongamos un problema de 2 dimensiones en una red cuadrada
- Supongamos que tomamos el cluster mas grande
- Supongamos que trabajamos sobre una lattice cuadrada de tamaño  $L^2$

o en su defecto que tomamos una red infinita y la observamos sobre una ventana de tamaño  $L^2$ .

-Variamos  $L$  y calculamos la masa en el cuadrado  $M(L)$  (dada la topologia)

El resultado es :

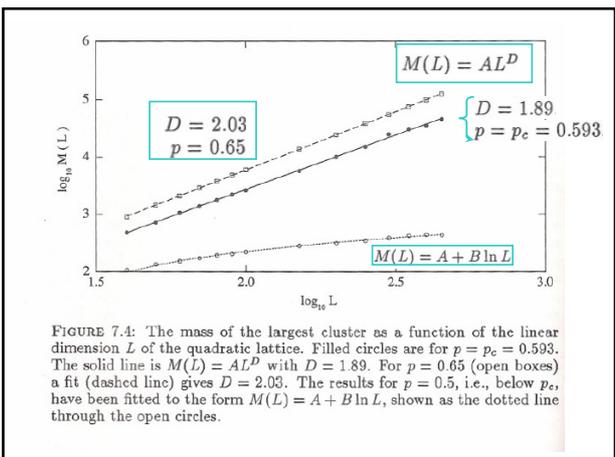
$$M(L) \underset{L \rightarrow \infty}{\sim} \begin{cases} \ln L & \text{para } p < p_c \\ L^D & \text{para } p = p_c \\ L^E & \end{cases}$$

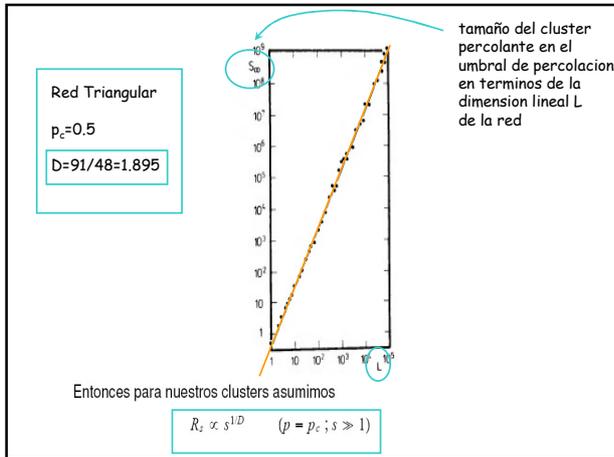
Tiene tamaño finito!

Para el caso bidimensional cuadrado

$$D = 1.89 \text{ y } E \sim d \longrightarrow D < d !$$

con  $d = 2$  dimension del problema





Ahora volvemos al comportamiento de  $\xi$  :

recordemos

$$\xi^2 = 2 \frac{\sum_s R_s^2 n_s s^2}{\sum_s n_s s^2}$$

$$M_k \propto e^{\tau-1-k} \propto |p-p_c|^{(k-1)/\sigma}$$

$$R_s \propto s^{1/D} \quad (p = p_c; s \gg 1)$$

$\sum n_s s^2$  es el momento de orden 2 de la distribucion de  $n_s$  diverge como  $|p-p_c|^{-\gamma}$ , con  $\gamma = (3-\tau)/\sigma$

Entonces el numerador seria un momento del orden  $k = 2 + 2/D$  y entonces diverge con un exponente  $(3-\tau+2/D)/\sigma$

$\uparrow$   
 $R_s^2$

Por lo tanto el cociente expresado en  $\xi^2$  diverge como  $2/\sigma D$ , pues tengo:  $(3-\tau+2/D)/\sigma - (3-\tau)/\sigma = \frac{2}{\sigma D}$

Pero segun vimos tambien diverge con  $\nu$ :  $\xi \propto |p-p_c|^{-\nu}$  de donde

$$1/D = \sigma \nu$$

Para la Bethe lattice  $D = 4$  para toda  $p$  y esto corresponde a  $d \sim \infty$

Algunos valores de  $\nu$

red	$\nu$
$2d$	$4/5$
$3d$	$\approx 0.9$
Bethe	$1/2$

Veamos ahora que pasa para  $d = 3$

a) sea  $p \sim 1$ ;  $(1-p)^t \Big|_{p=1} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

como  $n_s = \sum_i g_i p^i (1-p)^s \Rightarrow$

los perimetros relevantes son los mas pequeños, o sea las estructuras mas compactas o sea que no tienen nodos vacíos.

entonces esperamos  $R_s \sim s^{1/3}$  o sea diferente de lo que corresponde a  $p = p_c$  que es  $\sigma v$  con  $\sigma = 0.45$  y  $v = 0.88$

o sea  $0.88 \cdot 0.45 = 0.396 \sim 0.4$ ,

en general el comportamiento por encima de  $p_c$  corresponde a estructuras sin agujeros y  $D = d$

b) por debajo de  $p_c$  no hay resultados exactos generales pero se ha encontrado  $D = 2$

Asi que aca lo importante es la existencia de una distancia característica sobre la cual cambia "el comportamiento" del sistema.

Por ejemplo cuando se vio que [ para  $p \neq p_c$  ]

$$g(r) \propto \exp(-r/\xi)$$

donde  $\xi$  es la escala del problema (siempre que hay una exponencial debemos tener una variable adimensional).

Tambien vimos que  $\xi$  diverge en el punto critico y el comportamiento de la funcion de correlacion es tipo ley de potencias con

$$g(r) \propto r^{-(d-2+\eta)}$$

### El Cluster infinito en el umbral de percolacion

i) Por debajo de  $p_c$  no hay cluster percolante.

ii) Por encima de  $p_c$  si hay cluster percolante.

iii) cuando nos acercamos al umbral  $\xi \propto |p - p_c|^{-\nu}$

Como las cuentas se realizan sobre redes finitas vemos, que pasa

en terminos de  $L$ .

Ya vimos como va la masa del mayor fragmento para los tres regimenes que nos interesan.

En particular en  $p_c$  se verificaba que con  $L$  la dimension de la red o ventana

$$R_s \propto L \quad L \propto s^{1/D}$$

Debajo de  $p_c$  el maximo cluster es finito ocurre que al crecer  $L$  supera el tamaño tipico  $\xi$

y cuando  $L$  sigue creciendo la masa contenida mantiene cte y la densidad de nodos decrece.

La dimension fractal de estos clusters es 0.

Por encima de  $p_c$  la masa crece con  $L$  de la forma  $L^d$

En  $p_c$  la masa va como  $L^D$ .

En esta figura se muestra que pasa con las propiedades del maximo fragmento por, apenas, encima del unbral de percolacion en una red cuadrada.

$p_c = 0.592746$ . (Observar que el grafico es linar-log pero se grafica el log de  $\bar{\rho}$ ).

Se grafica la densidad  $\rho$  en terminos  $L$ .

$\rho = \frac{M}{V}$

$\frac{L^D}{L^d} = L^{(D-d)}$

$\bar{\rho} \sim L$

Regions I, II, III and SAMPLE EDGE are labeled.

### Crossover

El comportamiento critico esta asociado a la distancia divergente  $\xi$

$$s_\xi \propto \xi^D \propto (p - p_c)^{-D\nu} \propto (p - p_c)^{-1/\sigma}$$

Como vimos, el comportamiento para escalas menores que  $\xi$  el comportamiento es del tipo "critico", entonces :

$$n_s \propto s^{-\tau}$$

Esta es la situación para:

$$\left\{ \begin{array}{l} R_s \ll \xi \\ s \ll s_\xi \end{array} \right.$$

Para  $s \gg s_\xi$  tenemos el decaimiento exponencial

Vemos que hay dos regimenes bien diferenciados e indica que la Masa va como

- Por debajo de la distancia de correlacion  $\xi$  va como  $L^D$ . Las rectas van como  $D - d = -0.1$
- Por encima de  $\xi$  alcanzan una cte (mientras estemos mas o menos lejos de la superficie) o sea  $D - d = 0$

Como se compatibilizan estos dos regimenes?

Para  $L < \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D$

Para  $L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.

Si dividimos el volumen  $L^d$   
 En celdas de volumen  $\xi^d$   
 La masa en cada celda es  $\xi^{D-d}$   
 Tendremos  $(L/\xi)^d$  celdas  
 La masa total es  $M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d}$

$M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d} \propto PL^d$

Pero ademas  $P \propto (p-p_c)^\beta$  y  $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$  de donde



$M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d} \propto PL^d$

Pero ademas  $P \propto (p-p_c)^\beta$  y  $\xi \propto (p-p_c)^{-\nu}$  de donde

$(p-p_c)^\beta \propto \xi^{D-d} \propto [(p-p_c)^{-\nu}]^{D-d}$

De donde

$\nu(d-D) = \beta \Rightarrow D = d - \beta/\nu$

De aqui tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de  $\xi$ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresion.

Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente  $L/\xi$  luego

$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$

con  $m(L/\xi) = m(x)$  y si  $x \ll 1$ ,  $m(x) = cte.$  y para  $x \gg 1$ ,  
 $m(x) \propto x^{d-D} = (L/\xi)^{d-D}$ .

O sea que tenemos una relacion de escala para la masa contenida en un dado volumen.

$x = \frac{L}{\xi}$

$x \ll 1 \Rightarrow L \ll \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D \Rightarrow m(x) = cte$

$x \gg 1 \Rightarrow L \gg \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^d \Rightarrow m(x) = L^{d-D} \Rightarrow$   
 $M(L, \xi) \propto L^D \cdot L^{d-D} = L^d$

Finalmente

$M(L, \xi) \propto L^D m\left(\frac{L}{\xi}\right)$

Esto es una expresion de escala para una variable que en general es  $f(x,y) = x^{-\alpha} g(x/y^\beta)$

Otra forma de escribirlo es (con  $\xi = (p-p_c)^{-\nu}$ )

$M(L, (p-p_c)) = L^D m'((p-p_c)L^{1/\nu})$

o tambien

$M(L, (p-p_c)) = (p-p_c)^{-\alpha} m''((p-p_c)L^{1/\nu})$

donde  $m'' \dots$

### Funciones homogeneas

$F(\lambda x)$  es homogenea para todo  $\lambda \Rightarrow$

$$F(\lambda x) = g(\lambda)F(x)$$

Donde  $g(\lambda)$  sera tal que

$$F(\lambda \mu x) = g(\lambda \mu)F(x) = g(\lambda)F(\mu x) = g(\lambda)g(\mu)F(x) \Rightarrow$$

$$g(\lambda \mu) = g(\lambda)g(\mu)$$

Entonces

$$\frac{d}{d\lambda} g(\lambda \mu) = \lambda g'(\lambda \mu) = g(\lambda)g'(\mu)$$

Si  $\mu = 1$  y  $g'(\mu) = p$

$$\lambda g'(\lambda) = p g(\lambda)$$

si  $g(\lambda) = \lambda^p \Rightarrow g'(\lambda) = p\lambda^{p-1} = p\lambda^p/\lambda$  etc.

$$g(\lambda) = \lambda^p$$

Entonces

$$F(\lambda x) = \lambda^p F(x)$$

Para dos variables

$$f(\lambda^p x, \lambda^q y) = \lambda f(x, y)$$

si ahora defino  $\lambda = y^{-\frac{p}{q}}$

$$y^{\frac{p}{q}} f(y^{-\frac{p}{q}} x, 1) = f(x, y)$$

De donde la funcion homogenea de dos variables depende de  $(x, y)$  via  $y^{-\frac{p}{q}} x$

$$M(L, \xi) \propto L^p m\left(\frac{L}{\xi}\right)$$

Esto es una expresion de escala para una variable que en general es  $f(x, y) = x^{-\alpha} g(x/y^\beta)$

Otra forma de escribirlo es (con  $\xi = (p - p_c)^{-\alpha}$ )

$$M(L, (p - p_c)) = L^p m'((p - p_c)L^{1/\nu})$$

o tambien

$$M(L, (p - p_c)) = (p - p_c)^{-\alpha} m''((p - p_c)L^{1/\nu})$$

donde  $m'' \dots$

Si en vez de fijarnos en la masa nos fijamos en el  $R_c$ , haciendo un calculo similar (expresando la masa en terminos de  $R_c$ ) obtendremos

$$\bar{R}_c = s^p h(x) = s^p h((p - p_c) s^{\sigma})$$

Con

$$\begin{aligned} h(x) &= \text{cte para } |x| \ll 1 \\ h(x) &= x^{(d-p)/\sigma} \text{ para } x \ll -1 \\ h(x) &= x^{(d-p)/\sigma} \text{ para } x \gg 1 \end{aligned}$$

## Renormalizacion de celda pequeña

Vimos que aparece una distancia característica  $\xi$  que es la distancia de correlacion.

Esta distancia de correlacion me marca el cambio de comportamiento (como vimos del comportamiento en la vecindad de  $p_c$ )

$$\xi = (p - p_c)^{-\nu}$$

Vimos que para

$$L < \xi, \rho(L) = M(L)/L^d \text{ va como } L^D/L^d \text{ o sea como } L^{-\beta\nu}, \text{ donde usamos que } D = d - \beta/\nu$$

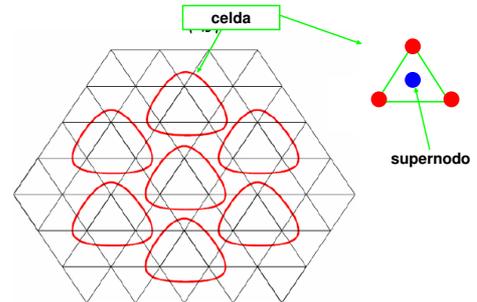
por otro lado

$$L > \xi \Rightarrow P \propto (p - p_c)^\beta$$

En el punto critico desaparece uno de estos comportamientos pues  $\xi \rightarrow \infty$

### Renormalizacion en percolacion

Sea una red triangular



En el punto crítico el cluster percolante es autosimilar (estadísticamente) como vemos esto?

- Supongamos un proceso en el cual dividimos nuestra lattice en celdas y a cada celda le asignamos estado ocupado o vacío con algún criterio.

- Pensamos en la red triangular, formamos celdas con tres nodos que forman triángulos. El resultado de aplicar esto sobre toda la red y el resultado es una nueva red triangular.

En este caso estamos escalenado con una "distancia típica"  $b = \sqrt[3]{3}$  pues  $b^3 = 3$  que es el número de nodos que contiene la celda.

$$b \ll \xi$$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estarán ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupación de estos nuevos supernodos es

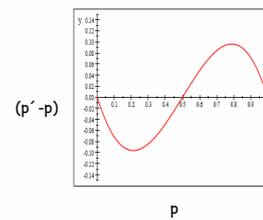
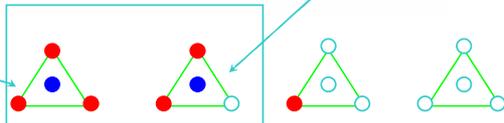
$$p' = p^3 + 3p^2(1-p)$$

Donde

$p^3$  corresponde a la proba de tener los 3 nodos originales ocupados

$p^2(1-p)$  es la proba de tener 2 ocupados y 1 vacío. El 3 enfrente corresponde a las 3 posibles formas de hacer esto

Si estudiamos  $(p' - p)$  vemos que:



De donde se ve que  $p'$  es invariante para  $p = 0$  y  $p = 1$ , que son triviales (la vacía queda vacía y la llena queda llena).

Pero hay otro punto interesante que es  $p = 0.5 = p_c$  es decir el punto critico donde esta el cluster percolate que es una fractal es tambien invariante!

A la  $p$  invariante la llamamos punto fijo  $p^*$



$$\text{En } p_c \quad \left\{ \begin{array}{l} \xi \rightarrow \infty \Rightarrow \forall L \rightarrow L < \xi \Rightarrow \\ M(L) \propto L^D \end{array} \right.$$

Si se escalea todo en  $b$ , debe seguir valiendo la relacion pues

$$\forall L \rightarrow L < \xi \Rightarrow \text{ si } L \rightarrow L/b$$

$$M(L/b) \propto (L/b)^D$$

Entonces

$$M(L) \propto L^D = b^D (L/b)^D = b^D M(L/b) \Rightarrow$$

$M(L)$  es una funcion homogenea y la unica forma posible es  $M(L) \propto L^D$

Cuando se escalea, todas las escalas deberian cambiar en  $b$

Para la red original

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

De done

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu} \text{ de donde}$$

$$b|p' - p_c|^{-\nu} = |p - p_c|^{-\nu}$$

$$\begin{aligned} \ln(b) + \ln(|p' - p_c|^{-\nu}) &= \ln(|p - p_c|^{-\nu}) \\ \Rightarrow -\nu[\ln(p' - p_c) - \ln(p - p_c)] &= \ln(b) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln[(p' - p_c)/(p - p_c)]}{\ln(b)} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

$$\text{como } (p' - p_c)/(p - p_c) = dp'/dp = \lambda$$

Volviendo al caso de la red triangular en celda pequena obtenemos que podemos escribir  $p'$  en un entorno de  $p^*$  como

$$p' = p^* + (dp'/dp)(p - p^*) + O(p - p^*) = p^* + \lambda(p - p^*) + O(p - p^*)$$

Calculando  $\lambda$  obtenemos:

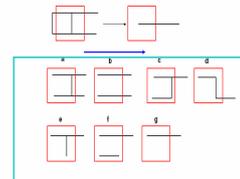
$$\lambda = (dp'/dp) = 3p^2 + 6p(1-p) - 3p^2 = 6p(1-p)$$

En  $p_c = 1/2$  obtenemos  $3/2$  de donde

$$\frac{1}{v} = \frac{\ln \lambda}{\ln b} = \frac{\ln(1.5)}{\ln(\sqrt{5})} = 0.73814 \Rightarrow v = \frac{1}{0.73814} = 1.3548$$

Resulta que se parece al valor exacto  $v = 4/3$  (J. Phys.A12,(1979),1857. )

### Precolación de links en la red cuadrada 2d

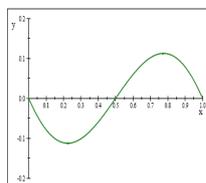


- a)  $p^5$
- b)  $p^4(1-p)$
- c)  $4p^4(1-p)$
- d)  $2p^3(1-p)^2$
- e)  $2p^3(1-p)^2$
- f)  $4p^3(1-p)^2$
- g)  $2p^2(1-p)^3$

Entonces la proba de conectar las dos celdas por bonds es

$$p' = p^5 + 5p^4(1-p) + 8p^3(1-p)^2 + 2p^2(1-p)^3 = p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)$$

$$; p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2) - p \Rightarrow$$



De donde  $p^* = 1/2$

Como  $b = 2$

resulta que

$$p^2(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2) \Rightarrow$$

$$\frac{dp'}{dp} = p^2(6p^2 - 10p + 2) + 2p(2p^3 - 5p^2 + 2p + 2)$$

$$= 2p(5p^3 - 10p^2 + 3p + 2)$$

en  $1/2$

$$2(1/2)(5(1/2)^3 - 10(1/2)^2 + 3(1/2) + 2) = \frac{13}{8} = \lambda$$

Entonces

$$1/v = \ln(\lambda)/\ln(b) = \ln(13/8)/\ln(2) = 0.70044$$

de donde

$$v = \frac{1}{0.70044} = 1.4277 \sim 4/3$$

Entonces podemos hacer el siguiente analisis: (finite size scaling?)

Si estamos en el punto crítico la transformación de escala se escribe  $\rightarrow$

Al pasar a "super-nodos" la masa se reduce basicamente en  $b^D$

$$M(L) = b^D M(L/b)$$

o tambien  $M(L)/b^D = M(L/b)$

Esta transformación se puede aplicar  $l$  veces:

$$M(L) = b^{lD} M(L/b^l)$$

puede hacerse con cualesquiera cantidad de pasos !?

Pero que pasa si  $\xi$  es finito?

$$M(L, \xi) = b^{lD} M(L/b^l, \xi/b^l)$$

a) Si  $L \ll \xi$  se itera hasta que  $b^l = L$  y toda la lattice se reduce a un punto

$$M(L, \xi) = L^D M(1, \infty) \propto L^D$$

b) Si  $L \gg \xi$  y  $p > p_c$ , se itera hasta que  $b^l = \xi$  pues luego se acaba la autosimilaridad, entonces  $\xi_{eff} = \xi/b^l = 1$  Con  $p > p_c \Rightarrow p_{eff}$  se hara del orden de 1 y el sistema se vera uniforme

En este caso  $b^{lD} \rightarrow \xi^{lD}$  y  $M(L/b^l, \xi/b^l) \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^d$  pues el sistema es "uniforme"

$$M(L, \xi) = \xi^{lD} (L/\xi)^d$$

c) si  $p < p_c$ , la  $p_{eff}$  sera casi 0 y  $M(x, 1)$  corresponde a grandes lattice animals y entonces  $M(L, \xi) = \xi^{lD} (L/\xi)^{D_0}$  con  $D_0$  la dimension fractal de estos animales.

Esto se llama "relaciones de finite size scaling."