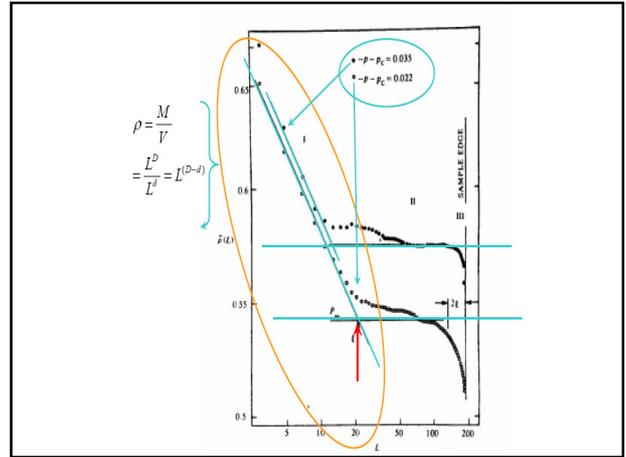
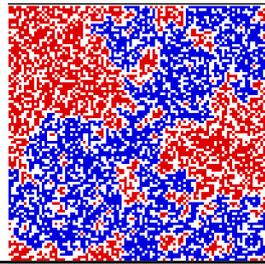


Monte Carlo
Finite size scaling
Large Cell Monte Carlo
etc.

侍



Para $L < \xi \Rightarrow M(L, \xi) \propto L^D$

Para $L > \xi \Rightarrow M \propto PL^d$

o sea la fuerza del cluster infinito por el volumen.

Si dividimos el volumen L^d

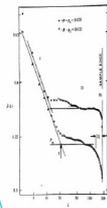
En celdas de volumen ξ^d

La masa en cada celda es ξ^{D-d}

Tendremos $(L/\xi)^d$ celdas

La masa total es $M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d}$

$M \propto (L/\xi)^d \xi^{D-d} \propto PL^d$



De aqui tenemos que los dos comportamientos se manifiestan por encima y debajo de ξ , ahora ponemos ambos comportamientos en una sola expresion.

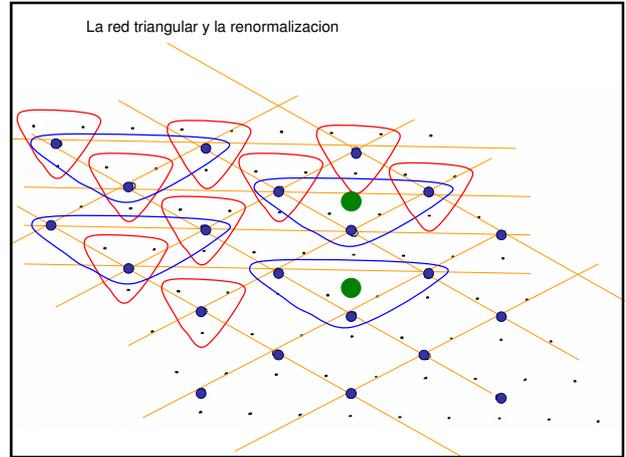
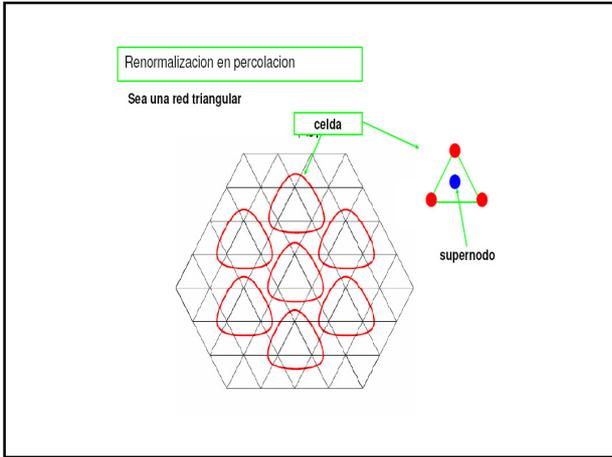
Como el cambio de comportamiento corresponde al cociente L/ξ luego

$M(L, \xi) = L^D m(L/\xi)$

con $m(L/\xi) = m(x)$ y si $x \ll 1$, $m(x) = c/x$ y para x
 $m(x) \propto x^{D-d} = (L/\xi)^{D-d}$.

Otra forma de escribirlo es (con $\xi = (p - p_c)^{-\nu}$)

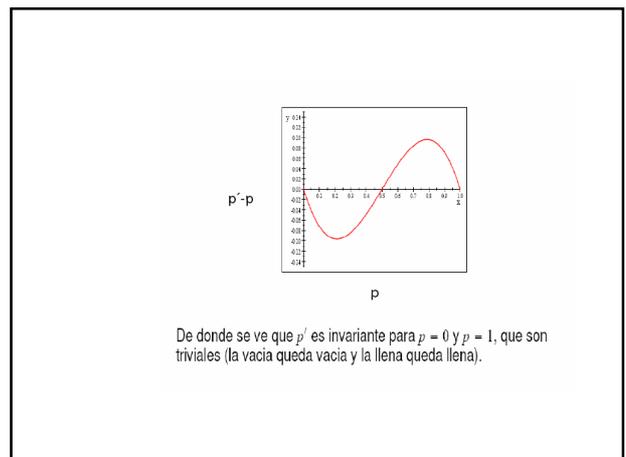
$M(L, (p - p_c)) = L^D m'((p - p_c)L^{1/\nu})$



En este caso estamos escalando con una "distancia tipica" $b = \sqrt[3]{3}$ pues $b^3 = 3$ que es el numero de nodos que contiene la celda.

$b \ll \xi$

- Pensamos que los nuevos "supernodos" estaran ocupados si la celda original tiene 3 o 2 nodos ocupados, como resultado de este criterio la probabilidad de ocupacion de estos nuevos supernodos es

$$p' = p^3 + 3p^2(1-p)$$


Para la red original

$$\xi \propto (p - p_c)^{-\nu}$$

la red renormalizada debera ser

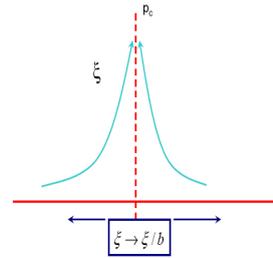
$$\xi' \propto (p' - p_c)^{-\nu}$$

Pero debido a la transformacion de escala

$$\xi' = \xi/b$$

De done

$$b(p' - p_c)^{-\nu} = (p - p_c)^{-\nu} \text{ de donde}$$



Pero que pasa si ξ es finito?

Teniamos : $M(L, \xi) = b^{D_s} M(L/b, \xi/b)$

a) Si $L \ll \xi$ se itera hasta que $b^i = L$ y toda la lattice se reduce a un punto

$$M(L, \xi) = L^{D_s} M(1, \xi) \propto L^{D_s}$$

No depende de ξ

$$\frac{\xi}{b^i} \rightarrow \frac{\xi}{L} \text{ con } \xi \gg L$$

b) Si $L \gg \xi$ y $p > p_c$

Se itera hasta que

$$b^i = \xi \text{ (luego se acaba la autosimilaridad)}$$

En ese punto

$$\xi_{\text{eff}} = \frac{\xi}{b^i} = 1$$

Entonces con $p > p_c \Rightarrow p_{\text{eff}} \rightarrow 1 \Rightarrow$ El sistema se vera uniforme

Observar que ξ_{eff}^{-1} es el minimo $M(L, \xi) = b^{D_s} M\left(\frac{L}{b^i}, \frac{\xi}{b^i}\right)$

En este caso $b^{D_s} \rightarrow \xi^{D_s}$ y $M(L/b^i, \xi/b^i) \rightarrow M(L/\xi, 1) \propto (L/\xi)^{D_s}$ pues el sistema es "uniforme"

$$M(L, \xi) = \xi^{D_s} (L/\xi)^{D_s}$$

c) si $p < p_c$ la p_{eff} sera casi 0 y $M(x, 1)$ corresponde a grandes lattice animales y entonces $M(L, \xi) = \xi^{D_s} (L/\xi)^{D_s}$ con D_s la dimension fractal de estos animales.

La relación

$$M(L, \xi) = b^{Dv} M(L/b^j, \xi/b^j)$$

Da lugar al escaleo de tamaño finito

Con $b^j = \xi$

$$M(L, \xi) = \xi^{Dv} m(L/\xi)$$

Observar que si tenemos una magnitud que para $L \gg \xi$ y $p > p_c$ y se comporta como $(p - p_c)^{-\nu}$ entonces usando argumentos de Renormalización

Podemos proponer

$$X(L, \xi) = \xi^{z/\nu} x_1(L/\xi)$$

con

$$X(L, \xi) \propto \xi^{z/\nu} \text{ para } L \gg \xi$$

y

$$X(L, \xi) \propto L^{z/\nu} \text{ para } L \ll \xi$$

o

$$M(L, \xi) = b^{Dv} M\left(\frac{L}{b^j}, \frac{\xi}{b^j}\right)$$

si $L \gg \xi$ y $p > p_c$

$$M(L, \xi) = \xi^{Dv} \left(\frac{L}{\xi}\right)^{-\nu}$$

$$X(L, p) = (p - p_c)^{-\nu} x_2((p - p_c)L^{1/\nu})$$

Renormalización de Celda Grande

Hasta ahora vimos la renormalización para celdas pequeñas

En las celdas pequeñas nos fijamos en como tratar los nodos (o bonds) interiores a la celda, pero las relaciones entre celdas estan totalmente dejadas de lado.

Ahora ilustramos el problema en la superficie de la celda

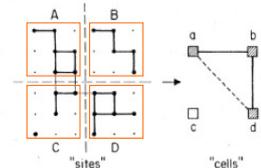
Tenemos las celdas A B C D

Una celda puede ser reemplazada por un super nodo si "percola"

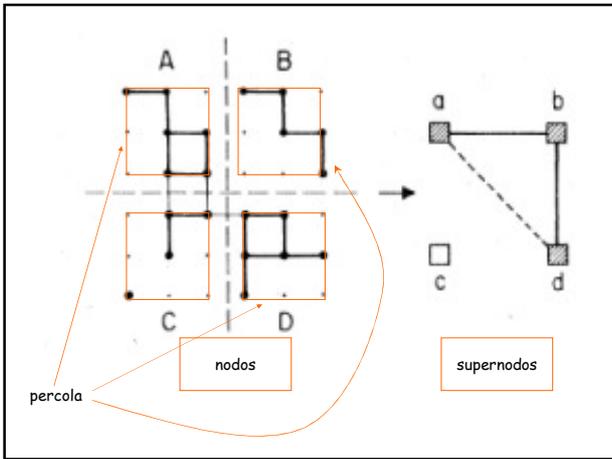
i) En la estructura original A no esta ^{Ten} relacionada con B a nivel de "nodos"

Pero si a nivel de **celdas**

ii) A-C-D están relacionados a nivel de nodos/links pero no a nivel de celdas



Lego-cell Monte Carlo renormalization group for percolation*
Peter J. Reynolds, H. Eugene Stanley, and W. Klein
Department of Physics and Center for Polymer Studies, Boston University, Boston, Massachusetts 02215
Received 13 August 1978



O sea hay efectos de superficie que modifica el "estado" del sistema al hacer la renormalizacion

Cual es la ventaja de usar una celda grande?

Lo que queremos solucionar es el hecho que aparezcan como desconectadas, luego de la renormalizacion, dos celdas que si lo estaban. (o la contraria)

Focalizamos en la vecindad del punto critico (clusters grandes)

Para que una celda este ocupada luego de la renormalizacion es que es contenga un cluster percolante (para la celda)

-Sea X_α la fraccion de nodos que pertenecen al cluster percolante en la celda α

-Sea X_β la fraccion de nodos que pertenecen al cluster percolante en la celda β

La celda es de dimension b contiene b^d nodos.

Si pensamos en redes "cubicas" en d dimensiones, "la superficie de contacto" de las celdas involucran b^{d-1} puntos de "contacto".

1) La proba de que un nodo del lado α de la interface este ocupado es X_α

2) del lado β es X_β .

3) Ambos deben ser ocupados simultaneamente para que las celdas esten conectadas

luego la proba de que ambos esten ocupados es $X_\alpha X_\beta$

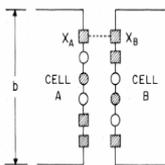
la de que esten desconetados es $(1 - X_\alpha X_\beta)$

Luego la proba de que las dos celdas no esten conectadas es

$$[(1 - X_a X_b)]^{b^{d-1}}$$

Entonces con $b \rightarrow \infty$ esto se va a 0 luego cuanto mayor es la celda mejor es el proceso.

$$p' = \left[(1 - X_a X_b)^{b^{d-1}} \right]$$



Relaciones de recurrencia

TABLE I. Renormalization-group transformation $p' = R_p(b; p, h=0)$, evaluated in closed form on the square lattice, using rule R_0 , for $b=2, 3, 4$, and 5. Note $q=1-p$.

b	$R_p(b; p, h=0)$
2	$p^4 + 4p^3q + 4p^2q^2$
3	$p^9 + 9p^8q + 36p^7q^2 + 82p^6q^3 + 93p^5q^4 + 44p^4q^5 + 6p^3q^6$
4	$p^{16} + 16p^{15}q + 120p^{14}q^2 + 560p^{13}q^3 + 1818p^{12}q^4 + 4296p^{11}q^5 + 7196p^{10}q^6 + 8136p^9q^7 + 5988p^8q^8 + 2784p^7q^9 + 780p^6q^{10} + 120p^5q^{11} + 8p^4q^{12}$
5	$p^{25} + 25p^{24}q + 300p^{23}q^2 + 2300p^{22}q^3 + 12650p^{21}q^4 + 53128p^{20}q^5 + 176992p^{19}q^6 + 478316p^{18}q^7 + 1054923p^{17}q^8 + 1880864p^{16}q^9 + 2666712p^{15}q^{10} + 2963364p^{14}q^{11} + 2556058p^{13}q^{12} + 1699665p^{12}q^{13} + 865132p^{11}q^{14} + 333630p^{10}q^{15} + 95845p^9q^{16} + 19916p^8q^{17} + 2836p^7q^{18} + 248p^6q^{19} + 10p^5q^{20}$

Entonces

Necesitamos usar celdas muy grandes

Necesitamos encontrar el punto fijo de la transformación $p \rightarrow p'$

Necesitamos hacer las cosas mas manejables

Sea p_{av} la probabilidad media a la cual por primera vez aparece un cluster percolante.

$$p_{av} = \int p \left(\frac{dP}{dp} \right) dp$$

Con

$$p_{av} - p_c \propto L^{-1/\nu}$$

Realizacion practica

1) Usando secuencias de numeros aleatorios (entre 0-1) y poblamos los nodos de una celda.

2) Luego variamos el valor de p por debajo del cual ocupamos cada nodo.

3) Luego nos fijamos para cual valor de p la celda percola por primera vez

de alli se construye



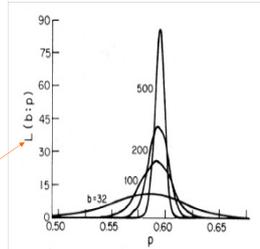
Volvemos a 1 Celda !

Entonces obtenemos la Densidad de probabilidad Para 32×32 , 100×100 , 200×200 , 500×500

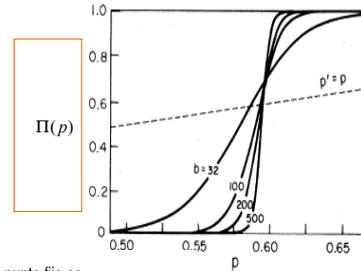
De que percole por primera vez A probabilidad p

O sea que obtenemos

$$L = \frac{d\Pi}{dp}$$



A partir de lo anterior se construye la cumulativa $\Pi(p)$ y se obtiene



la condicion de punto fijo es

$$p' = \Pi(p)$$

A medida que crece b la densidad se aproxima a una δ

Supongamos que entonces aproximamos el comportamiento de la densidad a una gaussiana, entonces (para b muy grande)

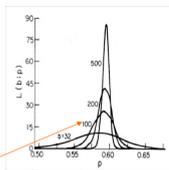
$$\text{con } f(z) \propto \exp(-z^2/2\Delta^2)$$

$$z = (p - p_{av})/\Delta$$

$$\text{con } \Delta^2 = \left[\int z^2 f(z) dz \right] / \left[\int f(z) dz \right]$$

La forma de la densidad es entonces

$$\frac{d\Pi}{dp} = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} \exp\left[-\frac{(p - p_{av})^2}{2\Delta^2}\right]$$



Con esto aplicamos la renormalizacion

La condicion de punto fijo es $\Pi(p^*) = p^*$

$$p^* = \int_{p=0}^{p=p^*} \frac{d\Pi}{dp} dp$$

(la probabilidad total de percolar a p)

Usando la aproximacion gaussiana y haciendo el cambio de coordenadas:

$$z = (p - p_c)/\Delta$$

$$p^* = (2\pi)^{-1/2} \int_{z(p=0)}^{z(p=p^*)} \exp(-z^2/2) dz$$

los limites de integracion son entre $z = -\infty$ y $z = (p^* - p_{00})/\Delta$

La condicion de punto fijo \Rightarrow

$$p^* \text{ debe ser la misma para distintos } b.$$

Luego la integral debe ser constante cuando variamos b , al variar b variamos Δ y para que se mantenga cte necesitamos que $(p^* - p_{00})$ varíe como Δ es decir como $b^{-1/\nu}$

Usando la tecnica usual de desarrollar en torno del punto fijo :

$$p' - p^* = \lambda(p - p_c)$$

recordando que la condicion de punto fijo es $\Pi(p^*) = p^* \Rightarrow$

con $\lambda = \left. \frac{d\Pi}{dp} \right|_{p^*} = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} \exp\left[-\frac{(p-p_{00})^2}{2\Delta^2}\right]$ pero como el exponente es cte por lo que vimos

$$\lambda = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} cte$$

de donde recordando que $[b(p' - p_c)^{-\nu} = (p - p_c)^{-\nu}]$

$$\frac{1}{\nu} = \frac{\ln \lambda}{\ln b}$$

$$\lambda = (2\pi)^{-1/2} \Delta^{-1} cte$$

o sea

$$y(b) = \frac{\ln(1/\Delta)}{\ln b} - \frac{C}{\ln b}$$

determinando $y(b)$ podemos calcular el valor asintotico para $1/\nu$ y se obtiene $1/\nu = 3/4 \Rightarrow \nu = 4/3$

Resultados

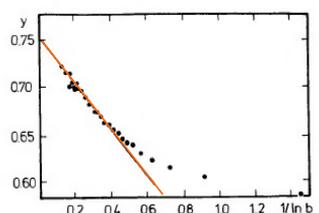


Fig. 23. Results of large cell renormalization for the triangular lattice, using b up to 10 000 (see Eschbach *et al.*, 1981). The b -dependent effective exponents y , determined from the width of the distribution function for the threshold, are plotted versus $1/\ln b$ (solid circles). A tangent on the values for large b has the 'true' $y = 1/\nu$ for infinite systems as intercept. These data are compatible with the intercept being 0.75, corresponding to the supposedly exact $\nu = 4/3$.

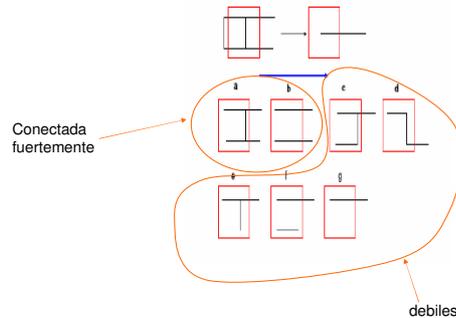
usando la ordenada al origen del fit lineal

$$\frac{1}{\nu} + \frac{C}{\ln b} = \frac{\ln(1/\Delta)}{\ln b}$$

rescatamos entonces

$$\Delta = \exp(-C)b^{-1/\nu}$$

Recordemos el caso de percolacion de links en la red cuadrada



Una propiedad del cluster percolante

Tenemos relaciones fuertes y relaciones débiles entre celdas

Es probable que existan muchos de estas conexiones simples

Son entonces las "mas debiles"

Es entonces apropiado pensar en que debe estar asociado con ν

Sea un parámetro π que es la probabilidad de **no remover** un link del sistema

Dado que el cluster percolante en p^* es "muy tenue", debe romperse con $\pi < 1$ (es infinito...)

Por lo tanto $\pi=1$ es el punto fijo de π en $p=p^*$

Aplicamos renormalizacion y entonces escribimos

$$1 - \pi = \Lambda(1 - \pi) + \Lambda_2(1 - \pi)^2 + \dots$$

$1 - \pi'$ es la probabilidad de desconectar los lados de las celdas
 $\Lambda(1 - \pi)$ es entonces el el numero medio de celdas conectadas por un link simple multiplicado por la probabilidad de un link simple
 $\Lambda = M_{sc}(b)$

Si π se aleja de 1 es lo mismo que alejar p de p^* (lo rompemos)

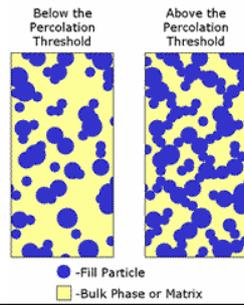
$$\Lambda = \left(\frac{d\pi'}{d\pi} \right)_{\pi'} = \left(\frac{dp'}{dp} \right)_{p^*} = b^{1/\nu}$$

Por lo tanto

$$M_{sc}(b) = b^{1/\nu}$$

Luego el cluster percolante tiene links simples en todas las escalas

Conductivity



Conductividad

Sea el siguiente experimento :



Fig. 24. Definition of the conductance of a random conductor network. All copper squares in the top row of the lattice are connected to a heavy copper bar (a loss of energy in the bar), and so are all squares in the bottom row. A battery then applies a unit voltage between these two bars. The resulting electrical current is called the conductance.

la lattice completa tiene $L \times N$ cuadrados y algunos estan "llenos de cobre" y los otros vacios

Si el sistema fuese homogéneo entonces la conductancia sería

- a) proporcional al área $\Rightarrow N^{d-1}$
- b) inversamente a la longitud $\Rightarrow 1/L$

Del mismo modo la resistividad es proporcional a

$$R' \propto L/N^{d-1}$$

Entonces con $I = V/R$ con $V = 1$ queda $1/R$

1/C

Si definimos la conductividad Σ que depende del material es la proporcionalidad

$$I = 1/R = \Sigma C$$

(no depende del tamaño y la forma)

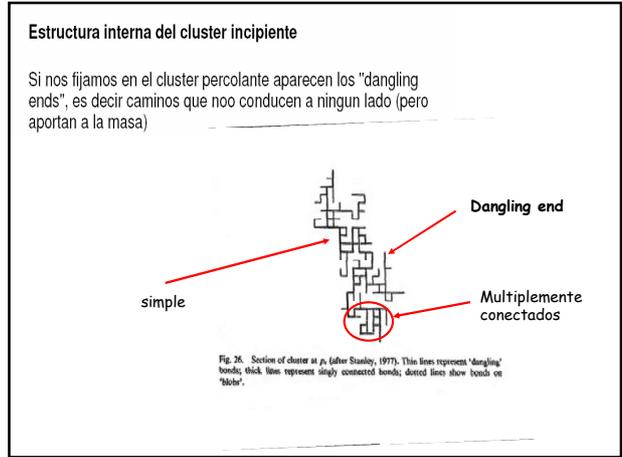
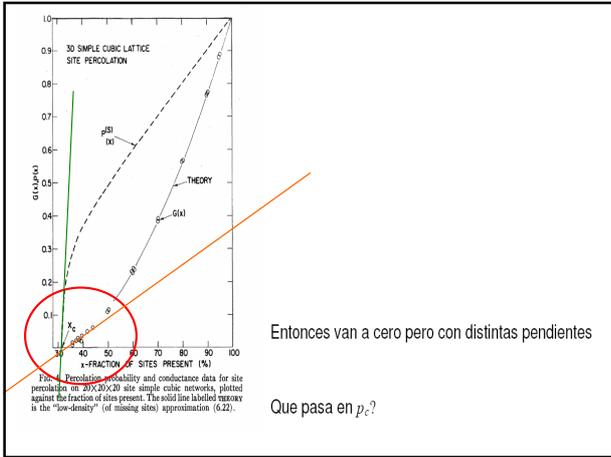
Para $L = N$ (cuadrada)

$$\Sigma = I/C = I(L^{d-1}/L) = I \cdot L^{2-d}$$

En una red infinita $\Sigma(p = 1) = P(p = 1) = 1$

Además $\Sigma(p < p_c) = P(p < p_c) = 0$

Cálculos detallados dan



La conductividad Σ se parametrizan por

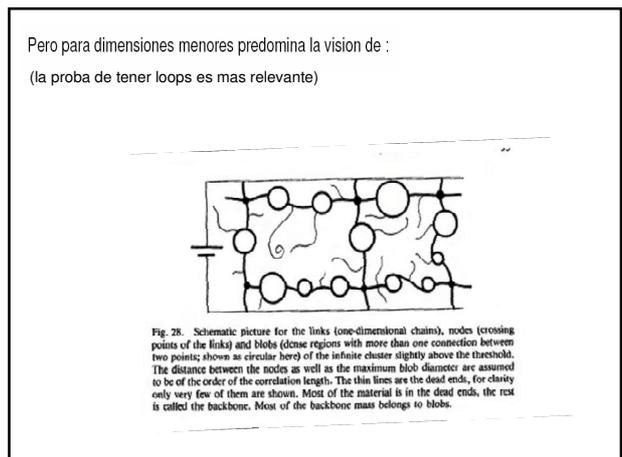
$$\Sigma \propto (p - p_c)^\mu$$

Con μ un nuevo exponente crítico.

Surgieron entonces distintas versiones respecto a la estructura del cluster percolante

Una era que esta compuesto nodos unidos por "single bonds". Se manifesto correcto para $d > 6$ dimensiones

(porque seria esto?)



Algunas dimensiones fractales en el cluster incipiente

Sea $L \ll \xi$ o $p = p_c$

La conduccion no depende de los "dangling ends"

Si removemos los "dan....." nos quedamos con el "backbone"

Como en p_c no hay escalas entonces

$M_b(L) \propto L^{D_b}$

Con $D_b < D < d$

Es una fracción del cluster percolante

Entonces la masa del backbone respecto de la masa del cluster se va a cero.

Como ademas tenemos que $M_{sc} \propto L^{D_{sc}}$ resulta que

$D_{sc} < D_b < D < d$

Podemos preguntarnos como es el camino minimo entre dos puntos extremos (en los blobs hay muchos caminos)

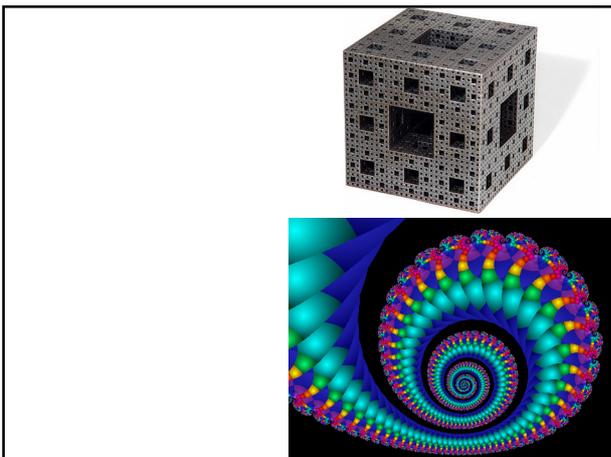
Se ha determinado que

$l_{min}(L) \propto L^{D_{min}}$

Resultando

$D_{sc} < D_{min} < D_b < D < d$

$1/\nu = D_{sc} < D_{min} < D_b < D = d - \beta/\nu$



Modelos Fractales

Definiciones de Fractales

a) Maldebroit 1982

Una fractal es por definicion un conjunto para el cual la dimension de Hausdorff-Besicovitch supera estrictamente la dimension topologica (muy restrictiva)

b) Maldebroit 1986

Una fractal es una "forma" compuesta por partes que se parecen al todo de alguna manera

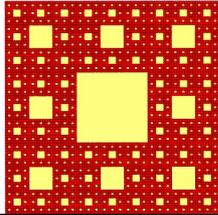
Hasta ahora vimos que:

1) hay pocos resultados exactos para la estructura de los clusters en el punto crítico

2) Fractalidad es "la palabra"

Existen ciertos procesos geométricos determinísticos de construcción de fractales llamados "modelos fractales recursivos geométricos", son fractales no aleatorias.

Primero tenemos la "alfombra de Sierpinski"



Se empieza con un cuadrado lleno de área $A = 1$, y Masa $M = 1$

Un cuadrado lleno se reemplaza por 9 cuadrados con el central vacío (que forman un cuadrado)

Un cuadrado vacío se reemplaza por un cuadrado de área 9 veces mayor (un cuadrado)

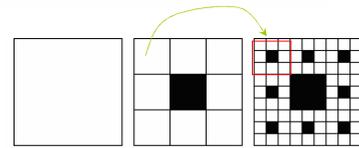


Figure 1: $n = 0$ Figure 2: $n = 1$ Figure 3: $n = 2$

De aquí resulta que la secuencia de áreas es

	M	A	llenos	vacíos
1	1	1	1	0
2	8	9	8	1
3	64	81	64	$1 \cdot 9 + 8 \cdot 1$
4	$64 \cdot 8$	$81 \cdot 9$	$64 \cdot 8$	$1 \cdot 9 \cdot 9 + 8 \cdot 1 \cdot 9 + 64 \cdot 1$

$$64 \cdot 8 + 81 + 72 + 64 = 729$$

La condición de fractalidad en nuestro caso es

$$M = L^D$$

con $D < d$

en este caso resulta : para n pasos

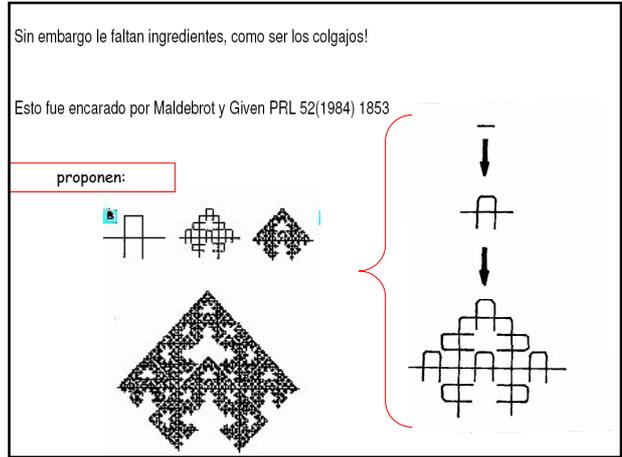
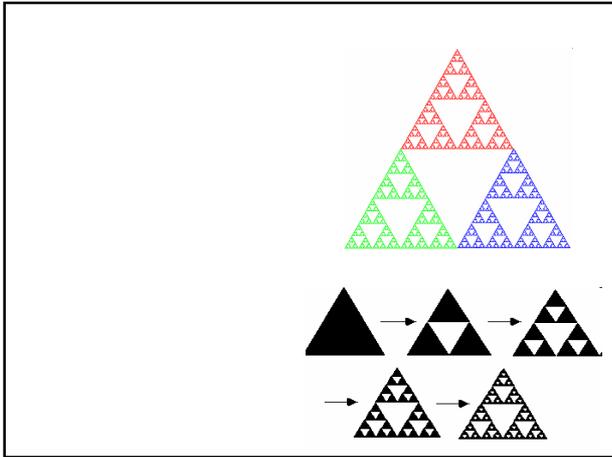
$$L = 3^n$$

$$M = 8^n$$

De donde

$$D = (\ln M) / (\ln L) = \ln(8) / \ln(3) = 1.893$$

Lo interesante es que la dimensión fractal resultante es que la dimensión fractal resultante es muy cercana a 1.896 que se parece mucho a la dimensión fractal del cluster percolante en 2 dimensiones.



En este caso tenemos:

a) empezamos con un segmento de longitud 1

b) en el siguiente paso tenemos una celda de:

uniones $\Rightarrow 8$
camino minimo $\Rightarrow 3$
camino maximo $\Rightarrow 5$
suelos $N_{sc} \Rightarrow 2$

la resistencia entre nodos se multiplica por :
 $2 + 1(\frac{1}{3} + 1) = 2 + \frac{3}{4} = \frac{11}{4}$

De aqui podemos calcular diversas dimensiones fractales

a) para el "Bulk"
la masa se incrementa en **factor 8**
el tamaño va por 3
De donde resulta $D_B = \ln 8 / \ln 3 = 1.893$

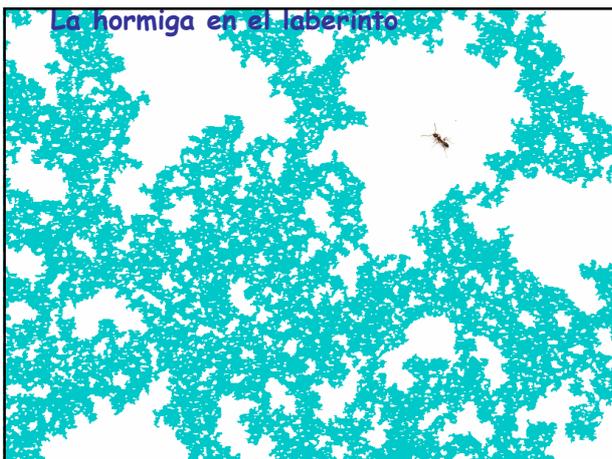
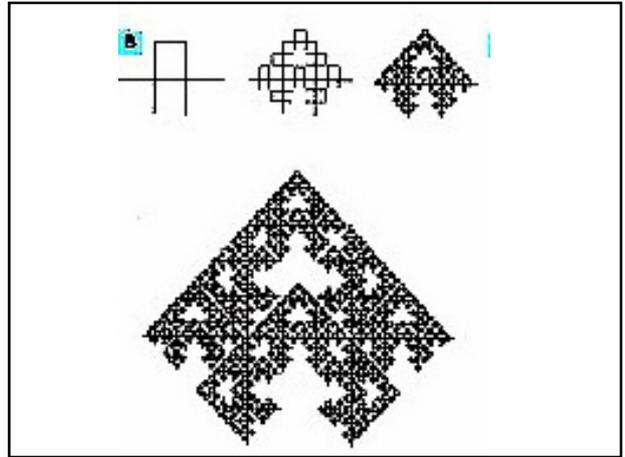
b) para el camino minimo
el camino crece en 3
el tamaño crece en 3
De donde resulta $D_{min} = \ln 3 / \ln 3 = 1$

L=1 M=1
L=3 M=8
L=9 M=64

c) para el maximo
 el camino crece en 5
 el tamaño crece en 3
 De donde resulta $D_{max} = \ln 5 / \ln 3 = 1.465$

d) para los simplemente conectados
 los sc crecen en 2
 el tamaño crece en 3
 De donde resulta $D_{sc} = \ln 2 / \ln 3 = 0.631$

Resulta que cuando se hace crecer la dimension, mas se parecen a los "experimentales"



La hormiga

Distribucion Binomial

Sea una secuencia de N realizaciones independientes con dos posibles resultados $+1$ o -1 .

p	proba de	$+1$
q	"	-1
$p + q = 1$		

Si se hacen N realizaciones y entonces $\begin{cases} n \leftrightarrow +1 \text{ y } m \leftrightarrow -1 \\ n + m = N \end{cases}$

La probabilidad de una dada permutacion es $p^n q^m$

La probabilidad de una dada combinacion de n salidas +1 y de m salidas -1.

$$P_N(n) = \frac{N!}{n!m!} p^n q^m$$

esto es la distribucion binomial

$$\sum_{n=0}^N P_N(n) = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} = (p+q)^N = 1 \quad \text{(por teorema del binomio)}$$

Para el $\langle n \rangle$

$$\begin{aligned} \langle n \rangle &= \sum_{n=0}^N P_N(n) n \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{nN!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \sum_{n=0}^N P_N(n) = p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \\ &= pN \end{aligned}$$

del mismo modo $\langle n^2 \rangle = (Np)^2$

$$\begin{aligned} \langle n^2 \rangle &= \sum_{n=0}^N P_N(n) n^2 \\ &= \sum_{n=0}^N \frac{n^2 N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial}{\partial p} \left(\sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{N-n} \right) \right] \\ &= p \frac{\partial}{\partial p} \left[p \frac{\partial}{\partial p} (p+q)^N \right] = p \frac{\partial}{\partial p} [N(p+q)^{N-1} (p+q)] \\ &= pN + (Np)^2 - p^2 N = (Np)^2 + Npq \end{aligned}$$

De donde

$$\begin{aligned} \sigma_N^2 &= \langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2 = (Np)^2 + Npq - (Np)^2 \Rightarrow \\ \sigma_N &= \sqrt{Npq} \\ \frac{\sigma_N}{\langle n \rangle} &= \sqrt{Npq} \frac{1}{Np} = \sqrt{\frac{q}{p}} \frac{1}{\sqrt{N}} \end{aligned}$$

Que pasa si el experimento se hace sin reemplazo?

Bolas rojas y azules

$$P(X = k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Donde

- N=numero maximo de "bolitas"
- k=numero de exitos
- n-k=numero de fracasos
- n=numero de experimentos
- m=numero maximo de exitos
- N-m=numero maximo de fracasos

	drawn	not drawn	total
successes	k	m - k	m
failures	n - k	N + k - n - m	N - m
total	n	N - n	N

Estoy sacando n bolitas y quiero k rojas de un total de N bolitas con m rojas y n azules

Distribucion normal

Sea la binomial bajo las siguientes condiciones

- N es grande
- pN es grande

entonces los factoriales se escriben (aprox. de Stirling)

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Entonces

$$\begin{aligned} P_N(n) &= \frac{N!}{n!m!} p^n q^m = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^{(N-n)} \\ &= \frac{\sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N}{\sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi(N-n)} \left(\frac{N-n}{e}\right)^{(N-n)}} p^n (1-p)^{(N-n)} \\ &= p^n (1-p)^{(N-n)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \left(\frac{n}{N}\right)^{-n-1/2} \left(\frac{N-n}{N}\right)^{n-N-1/2} \right] \end{aligned}$$

Esto puede ser reescrito

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left[-(n + 1/2) \ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N - n + 1/2) \ln\left(\frac{N-n}{N}\right) \right. \\ &\quad \left. + n \ln p + (N - n) \ln(1 - p) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}} \exp \left[-n \ln\left(\frac{n}{N}\right) - (N - n) \ln\left(\frac{N-n}{N}\right) + n \ln p + (N - n) \ln(1 - p) \right] \end{aligned}$$

Esto tiene un maximo en $n = \langle N \rangle = Np$

Desarrollando en serie el exponente de la exponencial alrededor de $n = \langle n \rangle$

$$P_N(n) = P_N(\langle n \rangle) \exp \left[\frac{1}{2} B_2 (n - \langle n \rangle)^2 + \frac{1}{6} B_3 (n - \langle n \rangle)^3 + \dots \right]$$

$$P_N(n) = P_N(\langle n \rangle) \exp \left[\frac{1}{2} B_2 \epsilon^2 + \frac{1}{6} B_3 \epsilon^3 + \dots \right]$$

$$\text{Con } B_k = \left(\frac{d^k \ln[\sqrt{2\pi N} P_N(n)]}{dn^k} \right)_{n=\langle n \rangle}$$

Calculando B_2 y B_3 se obtiene

$$B_2 = \frac{-1}{Npq}$$

$$B_3 = \frac{1}{N^2 p^2 q^2} (q^2 - p^2)$$

Se puede ver que

$$|B_k| < \frac{1}{(Npq)^{k-1}}$$

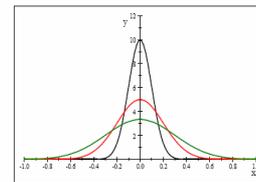
si $\epsilon \ll Npq$ se pueden despreciar terminos de orden superior a ϵ^2

$$P_N(n) \approx P_N(\langle n \rangle) \exp \left[-\frac{1}{2} |B_2| \epsilon^2 \right]$$

$P_N(\langle n \rangle)$ se determina por normalizacion

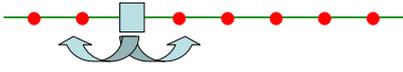
$$P_N(n) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(n - \langle n \rangle)^2}{\sigma_N^2} \right]$$

$$P_N(n) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \frac{(n)^2}{\sigma^2} \right]$$



Caminata al azar

Sea el problema unidimensional de la caminata aleatoria



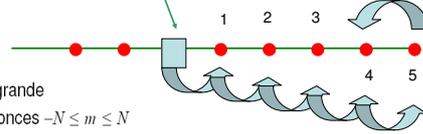
Se movera con pasos de tamaño fijo y tendra una probabilidad $p = 1/2$ de moverse a la derecha y $(1-p) = q = 1/2$ de hacerlo a la izquierda.

Supongamos que da N pasos.

n_1 sera el numero de pasos asociados a p o sea los que da a la derecha y $(N - n_1) = n_2$ los que dara a la izquierda.

El desplazamiento neto sera $m = (n_1 - n_2)$

Sean 6 pasos a partir de



Sea N grande

Entonces $-N \leq m \leq N$

Pero m estara dado por $m = N, N-2, N-4, \text{ etc.}$

Tomando en cuenta que

$$m = (n_1 - n_2) = (n_1 - N + n_1) \Rightarrow$$

$$n_1 = (m + N)/2$$

Reemplazamos en

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]$$

Obtenemos con

$$\langle n_1 \rangle = \langle m \rangle + N/2$$

$$\langle m \rangle = 0 \text{ por simetría}$$

$$(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2 = m^2/4$$

$$\sigma_N^2 = Npq = \frac{1}{4}N$$

Entonces

$$P_N(m) = \left[\frac{2}{\pi N}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{m^2}{2N}\right]$$

$$P_N(n_1) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2} \frac{(n_1 - \langle n_1 \rangle)^2}{\sigma_N^2}\right]$$

Ahora lo pensamos en terminos del desplazamiento neto tomando en cuenta que cada paso es de longitud l

$$x = ml$$

Sea $\Delta x \gg l$

entonces la proba de que la partícula este entre $x \rightarrow x + \Delta x$ luego de

N pasos es

$$P_N(x)\Delta x = P_N(m)(\Delta x/2l)$$

pues las posiciones accesibles estan separadas $2l$

quedara entonces

$$P_N(x) = \left[\frac{1}{2\pi Nl^2}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2N} \left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right]$$

Si la partícula da n pasos por unidad de tiempo, en t

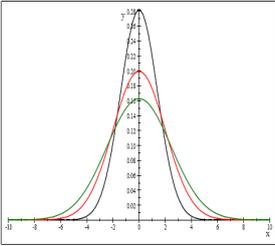
$$P_N(x,t)\Delta x = \left[\frac{1}{2\pi nlt^2}\right]^{1/2} \exp\left[-\frac{1}{2nt} \left(\frac{x^2}{l^2}\right)\right] \Delta x$$

Si $D = \frac{1}{2}nl^2$

$$P_N(x,t)\Delta x = \left(\frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right] \Delta x$$

Como $\langle x \rangle = 0 \rightarrow \langle x^2 \rangle$ va como $4Dt$

$\langle x^2 \rangle \propto t$



$P_N(x,t)\Delta x = \left(\frac{1}{2(\pi Dt)^{1/2}}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{4Dt}\right]$

Todo lo anterior es para un problema unidimensional son todos los nodos "llenos", luego no hay restricción en la evolución.

Cuando estamos por encima de p_c , esto es lo que obtenemos.

Ecuación Maestra

Para la probabilidad de ocupación de un nodo tenemos:

$$P_i(t+\tau) - P_i(t) = \sum_j [\sigma_{ji}P_j(t) - \sigma_{ij}P_i(t)]$$

("a la Pauli")

Donde

$P_i(t+\tau)$ = densidad de proba de ocupación del estado i en tiempo $t+\tau$
 σ_{ji} = densidad de probabilidad de transición de $j \rightarrow i$ en τ

De donde podemos definir los siguientes modelos de hormiga

- Las hormigas saltan de nodo ocupado a nodo ocupado pues se mueven en un cluster
- Sea z el número de vecinos inmediatos

Hormiga ciega \Rightarrow

$\sigma_{ji} = 1/z$ si i es accesible (ocupado) y
 $\sigma_{ji} = 0$ si i es inaccesible (vacío)

Hormiga miope $\Rightarrow \sigma_{ji} = 1/z_j$ donde z_j es el número de vecinos ocupados.

Para tiempos largos

$$dP_i/dt = \sum_j [\sigma_{ji}P_j(t) - \sigma_{ij}P_i(t)]$$

Donde ahora σ_{ji} es por unidad de tiempo.

Si estamos debajo de p_c los clusters serán finitos. Luego debemos llegar a un estado estacionario, en este caso $dP_i/dt = 0$, entonces

$$0 = \sum_j [\sigma_{ji}P_j(t) - \sigma_{ij}P_i(t)]$$

Sea s el tamaño del cluster

si la hormiga es

ciega $\Rightarrow \sigma_{ji} = \sigma_{ij} = 1/z \Rightarrow P_j(t) = P_i(t) = 1/s$
 miope $P_i(t) \rightarrow z_i/s$.

Entonces para la hormiga ciega:

todos los nodos son equivalentes y de allí la distancia asintótica R_c , es la distancia media entre nodos del cluster lo que pasa a ser R_s .

(R_s es el radio del cluster)

Si promediamos sobre todos los tamaños de cluster obtenemos :

$$R^2 = \sum_s n_s s R_s^2 \propto (p - p_c)^{\beta - 2\nu} \quad (t \rightarrow \infty, p < p_c)$$

Momento de orden $1 + 2\nu\sigma$

1) Para $p = 1$

$$R^2 \propto Dt \quad \text{Con } D=1$$

2) Cuando nos alejamos de $p = 1$ como sigue siendo "compacto" la ley sera igual pero con $D = D(p)$

3) Como debajo de p_c no hay difusion $\Rightarrow D$ debe irse a 0

Se ha demostrado que $D = \Sigma \Rightarrow R^2 \propto \Sigma t$

De donde cerca de $p_c \Rightarrow D \propto (p - p_c)^\mu$. Con μ el exponente de la conductibilidad

$$M_k = \sum_s s^k n_s \propto e^{(\tau - 1 - k)\sigma}$$

$$\sum_s s R_s^2 n_s \Rightarrow k = 1 + \frac{2}{D} = 1 + 2\sigma\nu \Rightarrow$$

$$\frac{\tau - 1 - k}{\sigma} = \frac{\tau - 1 - 1 - 2\sigma\nu}{\sigma} = \frac{\tau - 1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 2\nu$$

$$= \beta + (\beta + \gamma) - \frac{1}{\sigma} - 2\nu = \beta + \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} - 2\nu$$

$$= \beta - 2\nu$$

Si promediamos sobre todos los tamaños de cluster obtenemos :

$$R^2 = \sum_s n_s s R_s^2 \propto (p - p_c)^{\beta - 2\nu} \quad (t \rightarrow \infty, p < p_c)$$

Momento de orden $1 + 2\nu\sigma$

1) Para $p = 1$

$$R^2 \propto Dt \quad \text{Con } D=1$$

2) Cuando nos alejamos de $p = 1$ como sigue siendo "compacto" la ley sera igual pero con $D = D(p)$

3) Como debajo de p_c no hay difusion $\Rightarrow D$ debe irse a 0

Se ha demostrado que $D = \Sigma \Rightarrow R^2 \propto \Sigma t$

De donde cerca de $p_c \Rightarrow D \propto (p - p_c)^\mu$. Con μ el exponente de la conductibilidad

Como se combinan estos comportamientos?

proponemos $R = t^k r [(p - p_c) r^\nu]$

aquí aparece el tiempo!!!!

a) para $p > p_c$

$$R \propto t^k (p - p_c)^{\mu/2} r^{\mu/2} \propto t^{k + \nu\mu/2} D^{1/2}$$

de donde obtenemos el $D^{1/2}$
pero además r debe ir como $r^{1/2}$ de donde $k = (1 - \mu\nu/2)$

b) para $p < p_c$

R varia como $(p - p_c)^{\beta - 2\nu}$

b) para $p < p_c$
 R varia como $(p - p_c)^{\beta-2\nu}$

$$R = t^k [(p - p_c)t^\nu] \rightarrow$$

Para que esto ajuste necesitamos que

$$x = \frac{1}{2\nu + \mu - \beta}$$

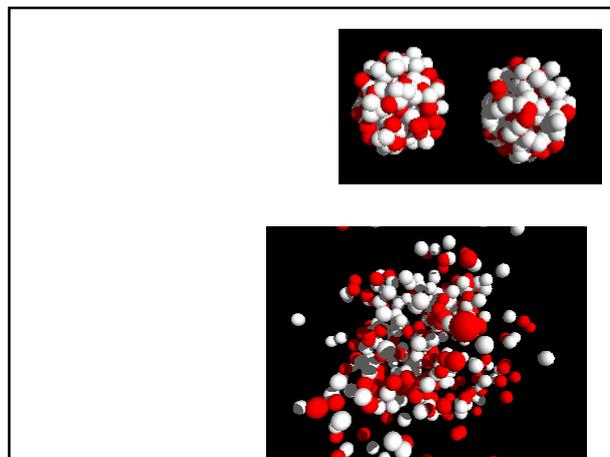
y

$$k = \frac{\nu - \beta/2}{2\nu + \mu - \beta}$$

c) para $p = p_c$
 nos queda

$$R \propto t^k$$

con un exponente anómalo ($k < 1/2$). con $k = 0.33$ para 2 dimensiones y $k \sim 0.2$ en 3 dimensiones



Señales estadísticas de comportamiento crítico en sistemas finitos

J.B. Elliott PRC 62 (2000) 064603

Supongamos que queremos estudiar comportamiento crítico en sistemas finitos.

Multifragmentación de clusters metálicos, núcleos atómicos, etc.

Sistemas que estudian

a) Reacciones nucleares de Au+ C a 1.0A GeV

Au=(Z,A)=(79, 197)
 C=(Z,N)=(6,12)

Producida la colisión hay una serie de nucleones emitidos tempranamente resultando (hipotéticamente) un sistema

Luego masa total varía (en función de la energía) de $A_0 \sim 92$ ($E^*/A_0 \sim 2\text{MeV/nucleon}$) a $A_0 \sim 194$. ($E^*/A_0 \sim 16\text{MeV/nucleon}$)

Experimentalmente se determina la carga de los fragmentos y se usa que para $Z < 2$ le corresponde una masa $= Z \cdot A_0/Z_0$ donde el cociente varía entre 2.55 y 2.36 para multiplicidades pequeñas y grandes, respectivamente.

b) percolacion de redes cubicas de $6 \times 6 \times 6 = 216$ nodos, la percolacion es de links pues el proceso experimental es a masa total constante

c) Particiones aleatorias
 Se trabaja con sistemas de $A = 79$ "elementos", que corresponde a la carga
 Se hace del siguiente modo :

- i) se fija la multiplicidad (random entre $[1, A]$)
- ii) Se fija el valor del maximo fragmento (que es funcion de $[A, m]$), A_{\max}^1 esta en $(1, A - m + 1)$
- iii) se sigue de este modo.

Aplicamos el modelo de Fisher.
 Sea A la masa de los fragmentos

$$n_A = q_0 A^{-\tau} f(z) g(\mu, T)^A$$

Con

$$z = \epsilon A^\sigma$$

y ϵ es la distancia al punto critico
 En el punto critico

$$n_A = q_0 A^{-\tau}$$

Que debe satisfacer (no es un power law cualesquiera)
 Normalizamos M_1

$$M_1(\epsilon = 0) = \sum A q_0 A^{-\tau} = q_0 \sum A^{1-\tau} = 1.0$$

pues trabajamos con cosas por nodo.

De donde

$$q_0 = 1 / \sum A^{1-\tau}$$

Valido si vale la aproximacion de FDM

El segundo momento diverge con $\gamma = (3 - \tau) / \sigma$

Señales de transiciones de fase en las distribuciones de clusters.

1) Fluctuaciones
 En el punto critico hay fluctuaciones de todos los tamaños
 Esta desaparicion de escalas caracteristicas puede ser estudiada
 Tener en cuenta que para fluidos en el punto critico se anula la tension superficial

i) Estudio de $\Delta(A_{\max}/A_0)$

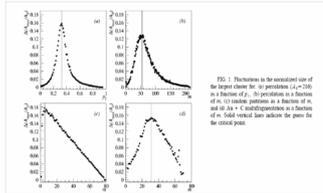


FIG. 1. Fluctuations in the normalized size of the largest cluster for (a) percolation ($L=200$) as a function of p_c , (b) percolation as a function of m , (c) random partitions as a function of m , and (d) A_{\max}/A_0 as a function of m . Solid vertical lines indicate the guess for the critical point.

Lo interesante es que la curva c) que corresponde a particiones aleatorias tiene un maximo que no tiene nada que ver con una transicion de fase de segundo orden. Observar que aparece la multiplicidad

Esto se entiende porque en $m = 1$ la fluctuaciones son 0 por condiciones de contorno y lo mismo para $m = 79$

ii) Fluctuaciones en el tamaño medio del maximo fragmento

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{N} \sum A^2 \right) - \langle A \rangle^2$$

tomando en cuenta que

$$\langle A \rangle = \left(\sum n_A A \right) / \left(\sum n_A \right) = M_1 / M_0$$

Entonces

$$\sigma^2 = \frac{M_2}{M_0} - \left(\frac{M_1}{M_0} \right)^2$$

En general se usa

$$\gamma_2 = \frac{\sigma^2}{\langle A \rangle^2} + 1 = \frac{M_2 M_0}{M_1^2}$$

Que se denomina la variancia reducida.

Hay diversos modos de medirla...

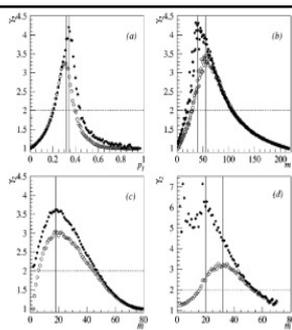


FIG. 2. Fluctuations as measured by γ_2 for (a) percolation as a function of p_c , (b) percolation as a function of m , (c) random partitions as a function of m , and (d) A_{\max}/A_0 as a function of m (at low m γ_2 is affected by fission events not completely filtered). Open circles show γ_2 , while filled circles show γ_2 (see text for details). Solid vertical lines indicate the guess for the critical point. A dotted horizontal line shows the value of $\gamma_2=2$.

Nuevamente aun para particiones aleatorias encontramos un maximo.

Divergencia de los momentos

Hemos visto que en percolacion diversos momentos divergen (los con $k > 1$) como

$$M_k = (p - p_c)^{-(k-1-\tau)/\sigma}$$

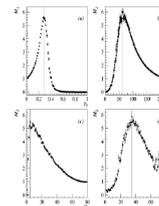


FIG. 3. The second moment M_2 of the cluster distribution for (a) percolation as a function of p_c , (b) percolation as a function of m , (c) random partitions as a function of m , and (d) A_{\max}/A_0 as a function of m . Solid vertical lines indicate the guess for the critical point.

Atencion, esto se calcula removiendo el cluster maximo pues FDM es sobre los clusters del gas.

Para calcular esto es necesario conocer la posicion de p_c, m_c

Siguiendo a Phys. Rev. C 49(1994) 3185

Calculo de τ_{eff} minimo

Si estudio el espectro de masa veo que este es del tipo :

$$n_A = q_0 A^{-\tau} f(\epsilon A^\sigma)$$

De donde se puede suponer que para todo p distinto de p_c la distribucion de fragmentos pequeños sera mas empinada que en el punto critico.

Pero

Si intentamos un fit con dos parametros :

$$\tau_{eff} = -\frac{\partial \ln n_A(\epsilon)}{\partial A}$$

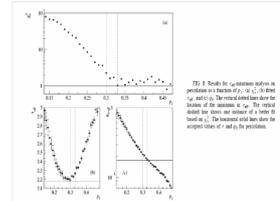
entonces

$$\tau_{eff} = \tau - A \frac{\partial \ln f}{\partial A}$$

luego

$$\frac{\partial \tau_{eff}}{\partial \epsilon} = -A \frac{\partial}{\partial \epsilon} \frac{\partial \ln f}{\partial A}$$

Entonces τ_{eff} depende de f !



Señales buenas

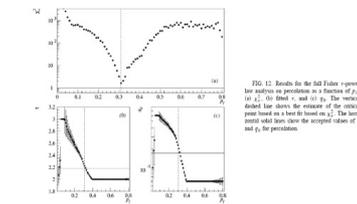
El power law de Fisher

Como vimos antes no se puede fitear τ usando dos parametros como si fuese un power law cualesquiera.

El metodo consiste entonces en fitear solo τ usando

$$q_0 = 1 / \sum A^{1-\tau}$$

Que es la ζ de Riemann



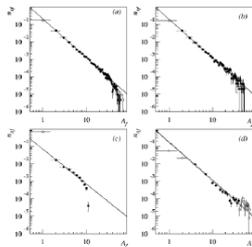


FIG. 16. Best fit Fisher α -power laws for (a) perturbation (p), (b) perturbation (w), (c) random perturbations, and (d) $A_i = C$ sampling-generation. Solid circles were included in the fit, open circles were excluded. Solid lines show the best fit power law, dotted lines indicate error in the power law based on errors in the fitted parameters.

NVM

Otra propuesta para detectar el punto crítico es:
C.O.Dorso et al. PRC 60 (1999)034606

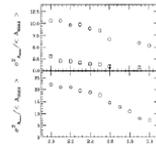


FIG. 2. Normalized variance for the random perturbations model when the perturbation is performed according to a power law with β in the range $2 < \beta < 12$ (the parameter β increasing region) for: in the upper part, the system with $A_{max} = 100$ with uncorrelated multiplicity (open squares) and fixed multiplicity (in the more probable value, open circles) and in the lower part the same but for $A_{max} = 200$ and fixed multiplicity. In all cases no signal is observed.

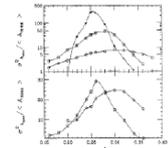


FIG. 4. Normalized variance for fixed perturbations in finite systems as a function of the total activation probability β , for: in the upper part, lattices of sizes $20 \times 20 \times 20$ (squares), $10 \times 10 \times 10$ (circles) and $5 \times 5 \times 5$ (triangles) with uncorrelated multiplicity. It is clearly seen that the smaller the size of the lattice the bigger is the difference of the maximums of the curves from the perturbation critical bond for infinite lattice ($\beta_c = 0.33$). This is a clear manifestation of finite size effects. The lower part shows the same as the upper part but for fixed multiplicity and the lattices of size: $10 \times 10 \times 10$ (squares) and $5 \times 5 \times 5$ (circles).

assuming the Tribuna potentials are given in Ref. [4] and give a corresponding equation of state (EOS) of classical matter with a temperature of about 10^9 MeV (see Ref. [1]).

Donde se grafica :

$$\sigma_{NVM} = \frac{\langle A_{max}^2 \rangle - \langle A_{max} \rangle^2}{\langle A_{max} \rangle}$$

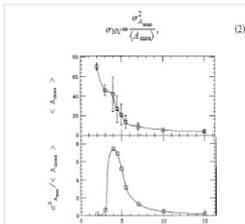


FIG. 6. The upper part shows the average mass of the maximum fragment while the lower part the NVM as a function of the initial temperatures displayed in Fig. 5. It can be seen that the NVM displays a sharp maximum for events with initial temperature of $T = 4$ MeV.