1 El Efecto Sachs-Wolfe

Supongamos que un rayo de luz es emitido desde un punto $\vec{r}_0 = R\hat{r}$ sobre la superficie de última dispersión en el tiempo $t_e = t_0 = t_{rec}$ y recibido en $\vec{r}_N = 0$ en el instante $t_o = t_N = t_{hoy}$,

$$R = c \int_{t_{rec}}^{t_{hoy}} \frac{dt}{a(t)} \tag{1}$$

En general la frecuencia de la luz va a tener un corrimiento que va a depender de la dirección $\hat{r}$, y que de acuerdo a la Ley de Wien va a tener un correlato en la temperatura de la radiación proveniente de esa dirección. Tenemos

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{\bar{\nu}_e}{\nu_o}\frac{\nu_e}{\bar{\nu}_e} \tag{2}$$

donde $\bar{\nu}_e$ es el promedio de la frecuencia emitida en todas las direcciones (que identificamos con el promedio de la frecuencia sobre el ensemble de todas las fluctuaciones primordiales). El primer factor es el que se obtendría debido a la expansión isótropa del Universo

$$\frac{\bar{\nu}_e}{\nu_o} = 1 + z \tag{3}$$

El segundo factor se debe a las perturbaciones en el potencial newtoniano en el momento de emisión y a las fluctuaciones locales en la tasa de expansión del Universo entre emisión y recepción

$$\frac{\nu_e}{\bar{\nu}_e} = 1 + \frac{\delta T}{\bar{T}} = 1 + \frac{1}{c^2}\varphi\left(R\hat{r}, t_{rec}\right) + x \tag{4}$$

Para poder calcular el término x dentro de nuestro modelo "Newtoniano" vamos a usar un principio de Huygens *sui generis* por el cual imaginamos la trayectoria de la luz como resultado de la absorción y emisión sucesiva de un fotón por observadores ubicados a lo largo del rayo. Entonces asumimos que la velocidad de cada observador, calculada según la teoría de Jeans, traza la expansión del Universo en ese punto. El corrimiento en la frecuencia va a ser identificado con el corrimiento Doppler debido a la diferencia de velocidades entre observadores consecutivos.

Nos imaginamos $N+1$ observadores en posiciones coordenadas $\vec{r}_i = r_i\hat{r}$ a lo largo del haz, $0 \le r_i \le r_N$. Entonces $\vec{r}_0 = R\hat{r}$, $\vec{r}_N = 0$, $\vec{r}_{i+1} = \vec{r}_i - dr\,\hat{r}$. Cada observador recibe y reemite un fotón en el instante t_i, con $t_0 = t_{rec}$, $t_N = t_{hoy}$ y $t_{i+1} = t_i + a(t_i)\,dr/c$. En ese momento se está moviendo con velocidad $\vec{v}_i = \dot{a}(t_i)\,r_i\hat{r} + a^{-1}(t_i)\,\vec{u}(r_i\hat{r}, t_i)$. Por lo tanto, la velocidad relativa entre el emisor i y el receptor $i+1$, en la línea de mira, es

$$\delta v_i = -\dot{a}(t_i)\,dr - \frac{dr}{a(t_i)}\frac{d}{dr}\hat{r}\cdot\vec{u}\left(r\hat{r}, t(r)\right)|_{r=r_i} \tag{5}$$

y esto resulta en un corrimiento Doppler

$$\frac{\nu_i}{\nu_{i+1}} = 1 + \frac{\delta v_i}{c} \approx e^{\delta v_i/c} \tag{6}$$

Haciendo los productos sucesivos encontramos

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \exp\left\{\int_{t_{rec}}^{t_{hoy}} dt\,H(t) - \frac{1}{c}\int_0^R \frac{dr}{a(t(r))}\frac{d}{dr}\hat{r}\cdot\vec{u}\left(r\hat{r}, t(r)\right)\right\} \tag{7}$$

El primer término da nuevamente

$$\frac{a(t_{hoy})}{a(t_{rec})} = 1 + z \tag{8}$$

por lo tanto el segundo término es la contribución a $\nu_e/\bar{\nu}_e$ que buscamos

$$x = \frac{-1}{c}\int_0^R \frac{dr}{a(t(r))}\frac{d}{dr}\hat{r}\cdot\vec{u}\left(r\hat{r}, t(r)\right) \tag{9}$$

Una integral por partes da

$$x = x_{Doppler} + x_{Sachs-Wolfe}$$

$$\begin{aligned} x_{Doppler} &= \frac{-1}{c}\left[\frac{\hat{r}\cdot\vec{u}\left(R\hat{r},t_{rec}\right)}{a\left(t_{rec}\right)} - \frac{\hat{r}\cdot\vec{u}\left(0,t_{hoy}\right)}{a\left(t_{hoy}\right)}\right] \\ x_{Sachs-Wolfe} &= \frac{1}{c}\int_0^R dr\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{a\left(t\left(r\right)\right)}\right)\hat{r}\cdot\vec{u}\left(r\hat{r},t\left(r\right)\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Reconocemos $x_{Doppler}$ como el efecto Doppler causado por la velocidad peculiar del emisor y del receptor, respectivamente. Esta último sólo depende de la dirección de mira como un término dipolar $\hat{r}\cdot\vec{u}\left(0,t_{hoy}\right) \propto \cos\gamma$, donde γ es el ángulo comprendido entre la dirección fija de $\vec{u}\left(0,t_{hoy}\right)$ y la dirección variable de detección; corresponde al momento dipolar de la radiación cósmica de fondo.

Para calcular $x_{Sachs-Wolfe}$ observamos que

$$\frac{d}{dr}\frac{1}{a\left(t\left(r\right)\right)} = \frac{1}{c}H\left(t\left(r\right)\right) \tag{12}$$

En la etapa dominada por la materia $a = \left(t/t_{hoy}\right)^{2/3}$ y $H = 2/3t$. Por otro lado

$$\begin{aligned} \hat{r}\cdot\vec{u}\left(r\hat{r},t\right) &= \frac{\partial}{\partial r}\theta\left(r,t\right) \\ &= -t\frac{d}{dr}\varphi\left(r\hat{r}\right) \end{aligned} \tag{13}$$

Por lo tanto

$$x_{Sachs-Wolfe} = \frac{-2}{3c^2}\left[\varphi\left(R\hat{r},t_{rec}\right) - \varphi\left(0,t_{hoy}\right)\right] \tag{14}$$

El segundo término es isótropo y por lo tanto debe considerarse como una correción a $\bar{\nu}_e$. Sumando el término de corrimiento al rojo Newtoniano encontramos

$$\frac{\delta\nu_e}{\bar{\nu}_e} = \frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3c^2}\varphi\left(R\hat{r},t_{rec}\right) \tag{15}$$

que es el *efecto Sachs-Wolfe.*

En el mundo real los efectos de presión no son completamente nulos y por lo tanto $\vec{u}$ no es exactamente lineal en t; cuando esto es tenido en cuenta aparece un efecto remanente, que constituye el *efecto Sachs-Wolfe integrado.*

References

[1] A. Einstein, Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes, Annalen der Physik, 35 (1911) (Engl. trans. On the influence of gravitation on the propagation of light, reprinted in H. A. Lorentz, A. Einstein, H. Minkowski and H. Weyl, *The principle of relativity* (Dover, New York, 1952))

[2] P. J. E. Peebles, *The Principles of Physical Cosmology* (Princeton UP, Princeton, 1993).