

COSMOLOGÍA - 1er cuatrimestre 2019

Prof. Esteban Calzetta

Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 0: Introducción

Radiación de cuerpo negro

1. Asumiendo que una persona puede aproximarse por un cuerpo negro, y tiene una superficie de 1.5m^2 y temperatura de 310 K , ¿cuál es la tasa a la que radía energía?. ¿Cuál es la energía media de los fotones emitidos (exprese el resultado en eV)?, ¿a qué longitud de onda corresponde?
2. Si uno mira la constelación de Orión, la estrella Rigel se ve azul, mientras que Betelgeuse se ve rojiza. ¿Cuál de estas dos estrellas es más caliente (asuma longitudes de onda λ_b y λ_r para los colores azul y rojo)?
3. Una estrella similar al Sol eventualmente evolucionará en una “gigante roja” y luego en una “enana blanca”. Una enana blanca típica tiene aproximadamente el tamaño de la Tierra, y su superficie tiene una temperatura aproximada de $2.5 \times 10^4\text{ K}$. Una gigante roja tiene una temperatura superficial de $3 \times 10^3\text{ K}$ y un radio 100000 veces más grande que el de una enana blanca. ¿Cuál es la potencia media por unidad de área, y la potencia total emitida por cada una de estas estrellas?, ¿cómo se comparan?
4. Un atizador de hierro se está calentando. A medida que aumenta su temperatura, el atizador comienza a brillar: primero rojo apagado, luego rojo brillante, luego naranja y amarillo. Use la curva de radiación de cuerpo negro o la ley de Wien para explicar estos cambios de color.
5. Dos estrellas α y β radían exactamente la misma potencia. Si el radio de α es tres veces el de β , ¿cuál es el cociente entre sus temperaturas superficiales?, ¿cuál es la estrella más caliente?

Equilibrio termodinámico y mecánica estadística

6. Un poco de termodinámica. Un poco de equilibrio. Para alcanzar el equilibrio termodinámico en un sistema es necesario que todas sus variables intensivas se encuentren equilibradas, por ejemplo la temperatura (eq. térmico), la presión (eq. mecánico) y el potencial químico (eq. químico). Dada la siguiente reacción (no necesariamente química) $A + B \leftrightarrow C + D$ a temperatura y presión constantes, muestre que para alcanzar el equilibrio termodinámico los potenciales químicos de las respectivas especies deben cumplir $\mu_A + \mu_B = \mu_C + \mu_D$. ¿Qué sucedería si la reacción en cuestión fuera $e^- + e^+ \leftrightarrow \gamma + \gamma$?

Ayuda. En equilibrio químico no hay variación de la energía libre de Gibbs, $dG = 0$. Recuerde que como la relación es de equilibrio las concentraciones de las especies no son independientes.

7. En etapas tempranas del Universo es fértil la hipótesis de modelar el contenido de materia y energía a través de pocas variables termodinámicas. En consecuencia se utilizan conceptos de equilibrio termodinámico. Sin embargo, como sabemos, el espacio-tiempo es dinámico. En particular si el Universo se expande no es evidente que el contenido de materia y energía pueda

alcanzar el equilibrio. Dé al menos tres argumentos por los cuáles considera que podría o no alcanzarse algún tipo de equilibrio. El Universo en su conjunto, ¿es un sistema en equilibrio?

8. Ahora un poco de mecánica estadística. Cuando una reacción logró alcanzar el equilibrio termodinámico, el número de partículas ocupando un estado microscópico (cuántico) con momento \mathbf{p} está dado por la función de distribución de equilibrio (o de máxima entropía)

$$f(\mathbf{p}) = \left[\exp \left(\frac{E(\mathbf{p}) - \mu}{k_B T} \right) \pm 1 \right]^{-1}. \quad (1)$$

Aquí el + es para un gas de fermiones con la distribución de Fermi-Dirac y el - corresponde a un gas de bosones con la distribución de Bose-Einstein. $E(\mathbf{p})$ es la energía de una partícula con momento \mathbf{p} , T la temperatura y μ el potencial químico.

- (a) Las variables intensivas T y μ están vinculadas con ciertas cantidades conservadas, ¿con cuáles?
- (b) La densidad numérica n y la densidad de energía ρ se obtienen al realizar las siguientes integrales en el espacio de las fases

$$n = g \int f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad y \quad (2)$$

$$\rho = g \int E(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \hbar^3}, \quad (3)$$

donde g es el número de grados de libertad internos o degeneración. Sabiendo que $k_B T$ es del orden de la energía media por partícula y que $E(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + c^2 p^2}$, tome el límite relativista y usando $\mu = 0$ calcule n y ρ a partir de (2) y (3) tanto para fermiones como para bosones. ¿Qué relación encuentra entre ρ_b y ρ_f ?

- (c) Ahora tome el límite no relativista y vuelva a calcular la densidad numérica y la densidad de energía con $\mu = 0$. ¿Encuentra la misma dependencia que en el caso relativista?, ¿qué puede concluir?
9. En el punto anterior asumimos que el potencial químico es estrictamente nulo. Una aproximación más sensata habría sido retener la dependencia con μ/T y luego tomar el límite $\mu/T \ll 1$ en caso de ser necesario. En un gas relativista de partículas, antipartículas y radiación, asumamos por concreitud electrones, positrones y fotones equilibrados mediante $e^+ + e^- \leftrightarrow \gamma + \gamma$. ¿Cómo calcularía el potencial químico de los electrones?

Ayuda. Intente estudiar el cociente de la diferencia entre las densidades numéricas de partículas y antipartículas, contra la densidad numérica de los fotones. Recuerde las relaciones entre los potenciales químicos en una reacción en equilibrio.

10. Desde el punto de vista microscópico la presión puede ser calculada a través de

$$p = \frac{g}{3} \int \frac{p^2}{E(\mathbf{p})} f(\mathbf{p}) \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 \hbar^3} \quad (4)$$

- (a) Calcule la presión en el límite ultra-relativista y en el no relativista en relación a la densidad de energía.

- (b) Usualmente llamamos ecuación de estado a la relación entre la presión y la densidad de energía. Verifique que la ecuación de estado fenomenológica $p/\rho = w$ con $w = 1/3$ y $w \simeq 0$ coincide con lo obtenido en el punto (10a) para el límite ultra-relativista y para el no relativista respectivamente.
- (c) Calcule la entropía para un gas ultra-relativista fermiónico o bosónico con $\mu = 0$.

Ayuda. Utilice las relaciones termodinámicas.

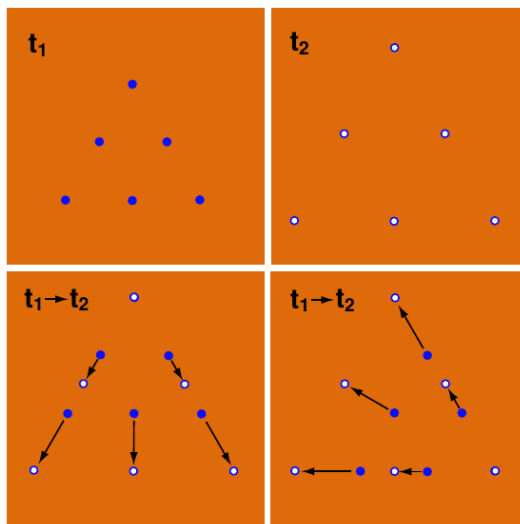
Estrellas, galaxias y expansión

11. El proyecto de astrometría espacial abordo del satélite Hipparcos midió los paralajes de más de 2.5 millones de estrellas entre las más brillantes del cielo. Si la precisión con la cual se determinan ángulos es de 0.001 segundos de arco, ¿cuál es el error en la estimación de la distancia a Sirio, ubicada a unos 9 años luz del Sol?
12. La fotosfera de estrellas típicas tiene una temperatura de 6000 K. Esta energía térmica hará que los átomos de aquellos elementos que la componen posean movimientos erráticos y por ende que sus emisiones características sufran el llamado ensanchamiento de las líneas espectrales (debido al efecto Doppler-Fizeau). Si ahora consideramos una estrella ubicada en uno de los brazos de nuestra galaxia, el corrimiento de su espectro podría darnos una estimación de la magnitud de la rotación de la galaxia.
- (a) Teniendo en cuenta el ensanchamiento mencionado más arriba ¿qué condición debe darse para que así sea? Estime dicho ensanchamiento para la emisión del Ca II cuya longitud de onda en el laboratorio es $\lambda = 3969 \text{ \AA}$.
- (b) En el espectro de una estrella, la línea de Ca II nos llega modificada como resultado de la rotación galáctica. Se espera que esta línea sufra corrimientos hacia el rojo o hacia el azul de magnitud $|z| \sim 10^{-3}$ correspondientes a variaciones de 4 \AA en λ . ¿Es este valor mayor o menor al obtenido más arriba?
13. (a) Una galaxia típica contiene unas 10^{11} estrellas y tiene un tamaño aproximado de 30 kpc. Suponiéndola esférica y compuesta exclusivamente de estrellas similares al Sol, calcule la velocidad de escape (de una estrella) de esta galaxia.
- (b) Considere un modelo cosmológico newtoniano, en el que una distribución esférica homogénea de materia de densidad ρ y de radio R se expande con velocidad $v = H_0 R$. Muestre que una partícula masiva en la superficie de esa distribución de materia podrá escapar a la atracción gravitatoria ejercida por la materia en el interior de la esfera sólo si la densidad ρ es menor que un valor crítico $\rho_c = 3H_0^2/(8\pi G)$. ¿Cuál es el valor de ρ_c si $H_0 = 100 \text{ km}/(\text{seg Mpc})$?
14. Los átomos, la Tierra, el Sol y la Galaxia no se expanden según la expansión general de nuestro Universo detectada por primera vez por Hubble, ya que constituyen sistemas ligados por fuerzas eléctricas o gravitatorias. Compare la velocidad de escape de nuestra galaxia con la velocidad de recesión para un radio galáctico (vista desde el centro del sistema) ¿Qué deduce? Repita el mismo procedimiento para un cúmulo rico de galaxias típico y para un grupo de cúmulos. ¿Qué concluye?
15. Considere las dos afirmaciones siguientes
- (a) Isotropía alrededor de todo punto implica homogeneidad

(b) Homogeneidad en todo punto implica isotropía

¿Son verdaderas? Discuta y dé ejemplos que ilustren sus respuestas.

16. Considere la siguiente figura que representa una distribución de galaxias a dos tiempos cosmológicos distintos [t_1 (t_2) \rightarrow galaxias negras (blancas)]. Vea si puede discutir sobre dos de los grandes pilares de la cosmología moderna: el principio cosmológico y la ley de expansión de Hubble.



- (a) ¿Qué sucede si hace pasar *la película* en el sentido inverso? ¿Se llegará a algún punto singular?
- (b) Vuelva a mirar la figura y discuta, ¿todos los puntos son el centro o ninguno lo es?