

# COSMOLOGÍA - 1er cuatrimestre 2019

Prof. Esteban Calzetta

Departamento de Física, FCEyN, UBA

## Guía 1: Ecuaciones de Friedmann

### Ecuaciones y soluciones

- (a) La expansión del universo en los modelos cosmológicos simples está descrita por una única función dependiente del tiempo  $a(t)$  llamada factor de escala (NO es el radio del universo, ¿por qué?). Considere que esta función está dada por  $a(t) \propto t^p$  con  $p > 0$  constante. Muestre que el parámetro de desaceleración  $q = -\ddot{a}/\dot{a}^2$  es constante y analice su signo en función de  $p$ .
  - (b) ¿Para qué valor de  $p$  la edad del universo  $t_0$  coincide con  $H^{-1}$  (no sólo para la época presente)? ¿Qué tipo de expansión resulta? ¿Cómo conseguiría este tipo de evolución partiendo de las ecuaciones de Friedmann?
- (a) A partir de la **ecuación de Friedmann**

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda}{3}, \quad (1)$$

con  $H = \dot{a}/a$ , y la **conservación local de la energía**

$$\frac{d(\rho a^3)}{dt} + p \frac{da^3}{dt} = 0, \quad (2)$$

obtenga la **ecuación de aceleración**

$$\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}a(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}a. \quad (3)$$

- (b) Aquí tenemos tres ecuaciones que no son independientes, de hecho cualquier par de las tres puede ser adoptado como las ecuaciones dinámicas fundamentales en cosmología. Identifique cuáles son las variables dinámicas. ¿Puede cerrar el sistema de ecuaciones?, ¿qué falta?
- Obtener la solución más general de la ecuación de Friedmann para el factor de escala puede ser complicado debido a la dependencia con las distintas componentes de energía y materia presentes en el Universo. Sin embargo es instructivo estudiar la evolución de  $a$  para ciertos casos simples.
    - (a) Obtenga la evolución del factor de escala para un universo con  $p = 0$ ,  $k = 0$  y  $\Lambda = 0$  (modelo de Einstein - de Sitter).
    - (b) Compare con los casos ( $p = 0$ ,  $k = -1$  y  $\Lambda = 0$ ) y ( $p = 0$ ,  $k = 1$  y  $\Lambda = 0$ ). En el último caso estime el máximo valor que alcanzará  $a$ .
  - (a) Dada una ecuación de estado del tipo  $p = w\rho$ , encuentre la relación entre la densidad de energía y el factor de escala.

- (b) Distintos valores de  $w$  representan de manera efectiva algún tipo de materia o energía. Asumiendo un universo plano  $k = 0$  y sin constante cosmológica  $\Lambda = 0$ , encuentre la expresión de  $a(t)$  para cada uno de los siguientes casos
- Materia no relativista (polvo),  $w = 0$ .
  - Energía de radiación,  $w = 1/3$ .
  - Energía oscura o energía de vacío,  $w = -1$ .
- (c) Es posible intentar resolver  $a(t)$  para un universo plano con los tres tipos de materia y energía mencionados arriba. Usando 4a y tomando como dato las densidades hoy, calcule la densidad de energía total del universo. ¿Qué aproximación realizaría para tener una idea del comportamiento de  $\rho_{total}(a)$ ? ¿Cuáles son los valores de  $a$  para los cuales se poduce el equilibrio entre materia y radiación, y materia y energía oscura?. Asumiendo  $a_0 = 1$  transforme los resultados de  $a$  a  $z$ .
5. Mostrar que no existe ninguna solución isótropa, homogénea y estática de las ecuaciones de Einstein que tengan como fuente a ningún fluido perfecto físicamente razonable. Si eliminamos la hipótesis de fluido físicamente razonable podemos proseguir con la cuenta. En efecto hágalo y encuentre que el universo estático al que arriba es inestable.

## Edad del universo, expansión acelerada y distancias

6. (a) Muestre que la ecuación de Friedmann puede expresarse como

$$H^2 = H_0^2 [\Omega_{\gamma,0}(1+z)^4 + \Omega_{m,0}(1+z)^3 + \Omega_{k,0}(1+z)^2 + \Omega_{\Lambda,0}], \quad (4)$$

donde  $H_0$  es la constante de Hubble hoy y  $\Omega_{\gamma,0}$ ,  $\Omega_{m,0}$  y  $\Omega_{\Lambda,0}$  corresponden a los valores actuales de la densidad de radiación, densidad de materia y densidad de energía oscura<sup>1</sup> normalizadas con la densidad crítica actual  $\rho_{c,0} = 3H_0^2 c^2 / (8\pi G)$ , respectivamente. Por último  $\Omega_{k,0} = -k / (a_0 H_0)^2$  representa la densidad de curvatura hoy.

- (b) ¿Existe alguna relación entre los parámetros de densidad  $\Omega_i$ ? Investigue los valores más recientes para los parámetros cosmológicos  $H_0$ ,  $\Omega_{\gamma,0}$ ,  $\Omega_{m,0}$  y  $\Omega_{\Lambda,0}$ ; ¿puede decir algo sobre la geometría espacial de nuestro universo?
- (c) A partir del resultado obtenido en 6a, calcular la expresión analítica más general para la edad del universo,  $t_0$ .
- Evalúe dicha expresión para el modelo de Einstein - de Sitter, universo plano solo con materia en forma de polvo.
  - Evalúe dicha expresión para un universo plano solo con radiación.
  - Evalúe dicha expresión para un universo plano con constante cosmológica y materia en forma de polvo.
  - ¿Cómo se comparan las edades del universo encontradas en 6(c)i, 6(c)ii y 6(c)iii?
  - Resuelva numéricamente la edad del universo para el caso general con los datos hallados en 6b y discuta las aproximaciones que se hicieron anteriormente.

<sup>1</sup>Aquí podríamos decir densidad de energía de vacío o densidad de constante cosmológica, todas tienen la misma relación  $p = -\rho = \text{cte}$ . Sin embargo cada concepto es diferente, su inclusión está motivada por distintos aspectos teóricos y observacionales y tienen distintas implicancias en otros procesos físicos.

7. El grupo de investigación de Adam Riess midió las distancias luminosas  $d_L$  y los redshifts  $z$  de cientos de galaxias a partir de las observaciones de las Supernovas Tipo Ia (descargar el archivo SnIa\_data.txt desde la página de la materia, sección “Guías”). Estos datos deben tomarse con cuidado ya que son mediciones muy difíciles de realizar en las cuales no es trivial reducir las fuentes de errores. Algunas de las fuentes de error importantes son los movimientos peculiares de cada galaxia y los errores sistemáticos en el estudio de las Supernovas Tipo Ia. Uno espera que los datos sean cada vez más confiables a medida que aumente el tiempo y número de observaciones obteniendo así una estadística más representativa. No obstante, explique en pocas líneas por qué es necesario utilizar Supernovas Tipo Ia para medir la distancia luminosa.

**Ayuda.** Piense cuál es la definición física de la distancia luminosa y qué puede medirse en astronomía.

- Calcule la expresión general para la distancia luminosa  $d_L(z)$ . Asumiendo un universo plano expanda esta expresión para  $z \ll 1$  a segundo orden. Escriba los coeficientes de esta expansión en función de  $H_0 = \dot{a}_0/a_0$  y  $q_0 = -a_0\ddot{a}_0/\dot{a}_0^2$ . Estos parámetros tienen una interpretación cinemática de la evolución de  $a(z)$ , ¿cuál es para cada uno?
- Utilice la expansión a segundo orden realizada en el punto 7a (modelo cuadrático) y genere un fiteo de los parámetros  $H_0$  y  $q_0$  sobre los datos SnIa.txt con  $0 < z < 0.5$ , ¿qué resultados obtuvo? ¿puede concluir algo? ¿podría haber utilizado la expansión sólo a primer orden?
- Ahora tome la expresión general para un universo plano y grafique sobre los datos la curva  $d_L(z)$  reemplazando  $H_0$  por el valor obtenido en el ejercicio 6b y los parámetros de densidad por
  - $\Omega_{\Lambda,0} = \Omega_{\gamma,0} = 0$  y  $\Omega_{m,0} = 1$  (Recuerde que  $\Omega_{k,0} = 0$  por universo plano. Podría calcularse todo nuevamente para un universo con curvatura arbitraria).
  - los valores hallados en 6b. Discuta cualitativamente la precisión de ambos modelos. ¿Qué concluye?

Algo más sofisticado habría sido generar un fiteo de todos los parámetros de la expresión general sobre los datos y extraer de allí los resultados, si se anima...

8. (a) Calcular la probabilidad  $dP(z)$  de que una galaxia con corrimiento al rojo entre  $z$  y  $z + dz$  interseque la línea de mira a una fuente con corrimiento al rojo  $z_f$ . Suponer que la sección eficaz de las galaxias es  $\pi r_g^2$  con  $r_g = 10h^{-1}$  kpc, y que el número de galaxias con corrimiento al rojo entre  $z$  y  $z + dz$  por unidad de volumen propio es  $n(z) = n_0(1+z)^3$  con  $n_0 = 0.02h^3 \text{ Mpc}^{-3}$ .
- (b) Calcular la profundidad óptica debida a galaxias para una fuente con corrimiento al rojo  $z_f$  definida como  $\tau(z_f) = \int_0^{z_f} dP(z)$  en un universo dominado por materia no-relativista y espacialmente plano. Calcular la fracción del cielo cubierta por galaxias en  $z_f = 1$ . ¿Para qué valor de  $z_f$  la profundidad óptica es igual a la unidad?