COSMOLOGÍA - 1er cuatrimestre 2019

Prof. Esteban Calzetta
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 2: Historia térmica

Termodinámica, expansión y física de partículas

1. Considere una expansión adiabática para nuestro universo en épocas recientes.

   (a) Estime la densidad de entropía y un valor adimensional para la entropía por barión.

   (b) Calcule ahora la entropía total de nuestro universo observable ¿Es grande o chica? ¿Contra qué la compararía?

2. En la época presente la radiación juega un rol comparativamente poco importante en el comportamiento mecánico y térmico de cuerpos materiales. Para verlo, basta tomar un volumen unidad de aire a temperatura y densidad normales. Como sabemos ya, este volumen incluye, además del aire, el "gas" formado por los cuantos de la radiación térmica. Verifique el rol menor de esta última, sabiendo que la densidad de masa y la capacidad calorífica por unidad de volumen de esta mezcla están dadas por

$$\rho = mn + aT^4/c^2 \qquad C = \frac{3}{2}k_B n + 4aT^3 \tag{1}$$

   donde m y n son las masas promedio de las partículas de aire y su número por unidad de volumen, respectivamenre, y donde k_B y a son las constantes de Boltzmann y de densidad de radiación.

   (a) ¿Qué pasa si ahora se traslada al centro de una estrella y considera la mezcla de materia y radiacion con $\rho = 100$ g/cm^3 y $T = 2 \times 10^7$ K?, ¿cambian en algo sus conclusiones sobre ρ y C?. ¿Y si T fuera aún mayor? [comentario: claro que ahora $C = (3/2)k_B n$ para la materia no tiene por qué ser cierto. Suponga que sí lo es y tome $n \sim 5 \times 10^{25}$ cm^{-3} $\sim \rho/m_{proton}$].

   (b) Traslademonos ahora al espacio interestelar donde encontramos nubes de gas con densidades $\rho \sim 10^{-24}$ g/cm^3 y temperaturas de $T \sim 100$ K. ¿Qué valores resultan ahora para ρ y C?, ¿cuál de los dos componentes será más relevante en lo que espera en lo que respecta a consideraciones termodinámicas? En particular, si un dado volumen de la mezcla se expande o se contrae adiabáticamente, ¿cuál de los dos componentes determinará la variación de su temperatura?

   (c) Finalmente, el balance entre materia y radiación en el universo es en muchos aspectos similar al caso del gas interestelar. Si, por simplicidad, tomamos $\rho \sim 10^{-30}$ g/cm^3 para la materia y una temperatura de $T \sim 1$ K, como es la capacidad calorífica por unidad de volumen de radiación comparada con la de la materia?, ¿a qué temperatura serían del mismo orden?

3. El número total efectivo de grados de libertad relativistas de partículas (bosones y fermiones) que constituyen un gas diluido y débilmente interactuante (i.e. con masas $m\,c^2 \ll k_{\rm B}\,T$) está dado por g_*, y g_* es una cantidad que depende de la temperatura T.

(a) Si sólo permanecen en equilibrio termodinámico los fotones, los electrones y los neutrinos (y sus antipartículas), muestre que $g_* = 10.75$ ¿En qué rango de temperaturas del universo tiene validez este valor?

(b) Ahora considere temperaturas menores, por debajo de aquella en la que electrones y positrones se aniquilan ¿Qué valor obtiene para g_*? (recuerde que en este caso, fotones y neutrinos no poseen la misma T)

(c) ¿Es este último el valor actual de g_*? ¿Qué suposición está haciendo sobre la masa de los neutrinos?

(d) Ahora considere temperaturas por encima de los 300 GeV e incluya todas las partículas presentes en el modelo estándar de partículas elementales ¿Qué valor obtiene para g_*?

(e) ¿Es este último valor el máximo posible para g_*? ¿O piensa usted que para energías muy altas (de gran unificación, por ejemplo) g_* podría ser aún mayor? Si fuera así ¿Cómo surgen esos nuevos grados de libertad?

(f) ¿Por qué no se incluye la contribución de las partículas no-relativistas en la definición de g_*? (¿Qué hay en sus distribuciones de equilibrio -para la densidad de energía, por ejemplo- que suprimen sus contribuciones?)

4. Sea un modelo de Friedmann dominado por radiación, compuesto por fotones, neutrinos, electrones y muones, a una temperatura T_1. En un instante posterior, cuando la temperatura es T_2, los pares de muones ya se han aniquilado, mientras que las demás partículas siguen existiendo en equilibrio térmico y siguen siendo relativistas. Calcular T_2 en función de T_1, $a(t_1)$) y $a(t_2)$).

5. Las principales reacciones responsables del equilibrio térmico entre los neutrinos electrónicos y el resto del gas durante la era leptónica (1 MeV $< k_B T <$ 100 MeV) son

$$e^+ + e^- \rightleftarrows \nu_e + \bar{\nu}_e \qquad e^\pm + \nu_e \to e^\pm + \nu_e \qquad e^\pm + \bar{\nu}_e \to e^\pm + \bar{\nu}_e. \tag{2}$$

Sabiendo que la sección eficaz de estos procesos es

$$\sigma = O(1) G_F^2 (p_1 + p_2)^2, \tag{3}$$

donde p_1 y p_2 son los 4-momentos de las partículas incidentes y $G_F = 1.17 \times 10^{-5}$ GeV^{-2} es la constante de Fermi, estime la temperatura a la que se desacoplan los neutrinos electrónicos. ¿Qué pasa con las otras dos especies de neutrinos?

6. Pruebe y discuta por qué, la temperatura de un gas relativista en equilibrio térmico evoluciona con el factor de escala de acuerdo a la ley $T \propto 1/a$. Por otro lado pruebe y discuta por qué la temperatura de un gas no relativista en equilibrio térmico, pero que no interactúa con las especies relativistas, evoluciona con el factor de escala de acuerdo con la ley $T \propto 1/a^2$.

Reliquias

7. Considere que existe una partícula X masiva y estable todavía no descubierta. Por simplicidad asumamos que tiene spin-0 (entonces $g_X = 1$). X y su antipartícula $\bar{X}$ interactúan suficientemente rápido en el universo temprano de modo que sus densidades alcanzan el equilibrio térmico. Imaginemos que la masa m_X es grande, del orden de la masa del protón o aún más.

(a) Si X interactúa poco, entonces se desacoplará ($\Gamma/H \lesssim 1$) cuando el universo todavía tiene una temperatura mayor a $m_X c^2/k_B$. En este caso, X permanece con una distribución de equilibrio térmico hasta hoy. Muestre que esto es una catástrofe cosmológica calculando $\Omega_{m_X} h^2$.

(b) Si X interactúa suficientemente rápido, entonces permanece con la distribución de equilibrio térmico cuando la temperatura del universo es menor que $m_X c^2/k_B$. En otras palabras, cuando la temperatura baja X y $\bar{X}$ pueden aniquilarse. Sin embargo como la densidad también baja, el ritmo de la reacción de aniquilación disminuye y se congelan las densidades. Esto deja una población de *reliquias* de X y $\bar{X}$ que podría ser la materia oscura hoy. Calcule la abundancia de reliquias de X y $\bar{X}$ como función de la sección eficaz de aniquilación σ_a y la masa m_X. Uno puede asumir que la reacción termina cuando la tasa de reacción es igual al parámetro de Hubble H. Puede asumir que el parámetro de Hubble está calculado cuando la temperatura del universo es $0.1\ m_X c^2/k_B$. Asumir además que $g^* = 100$ y que el potencial químico $\mu = 0$. Estime la sección eficaz que deberían tener las partículas X si queremos que sean la materia oscura que observamos hoy, i.e. $\Omega_{m_X} h^2 \simeq 0.11$.

(c) Disculpe las palabras en inglés, son para no agregar términos que luego puedan confundir. Exponga en palabras y con la mayor claridad posible qué entiende por *decoupling*, *freeze-out* y cuál es la diferencia entre lo que podríamos considerar como *hot relics* y *cold relics.* ¿Le encuentra algún sentido a hablar de *warm relics*?

8. Utilizando los conceptos del ejercicio 7 se define $Y_{EQ} = n_Y/s$ como el número de partículas Y por unidad de volumen comoviente, en el caso relativista tenemos que la densidad numérica está dada por $n_Y = (3/4)\zeta(3) g T^3/\pi^2$ [si se trata de un fermión, si fuera un bosón ¿qué factor debe omitir?], y la densidad de entropía está dada por $s = 2\pi^2 g_{*s} T^3/45$, con

$$g_{*s} = \sum_{i=\text{bosones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 + \frac{7}{8} \sum_{i=\text{fermiones}} g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3 . \tag{4}$$

En casos simples, esta abundancia Y_{EQ} se mantiene constante, y la idea es calcular su valor. De ahí podremos estimar un límite para la abundancia de partículas de Y

(a) Escriba la expresión más simple que pueda de Y_{EQ}. ¿Depende de T?

(b) Calcule la densidad de entropía hoy s_0. Recuerde que hoy los grados de libertad relativistas están dados por fotones y neutrinos no masivos.

(c) Habiendo resuelto 8b ya tiene una expresión para n_{Y0} (hoy) en función de Y_{EQ}. Si supone ahora que las hipotéticas partículas Y no son otra cosa que simples fotones, ¿cuánto debería valer Y_{EQ} para estos fotones? [ya sabemos el valor de $n_{\gamma 0}$ hoy].

(d) Calcule nuevamente el valor de Y_{EQ} suponiendo que las partículas Y son fotones pero ahora a partir de la expresión hallada en 8a. ¿Coincide este valor con el hallado en 8c?

(e) Calcule ahora la abundancia remanente $\rho_\nu = n_\nu m_\nu$ de neutrinos masivos que se desacoplan en el regimen relativista en función de la masa.

9. (a) Entre los candidatos a proveer la materia oscura, los neutrinos masivos ν tienen un papel privilegiado: sabemos que los neutrinos existen y, además, al menos alguna especie debe ser masiva. Si su abundancia hoy es una fracción de la de los fotones de la radiación cósmica de fondo, $n_\nu = (3/11) n_\gamma$ (por especie de neutrino) ¿Qué masa deberían tener

los neutrinos (considerados “no relativistas”) para “cerrar el universo”(hacer que $\Omega_\nu = 1$)? ¿Es este valor compatible con las observaciones en experimentos (no cosmológicos) de neutrinos?, ¿con cuáles?. Sabemos que $m_\nu c^2 \sim k_{\mathrm{B}} T_\nu$ es el límite que separa νs relativistas de νs no relativistas. Si $T_\nu \sim 2K$ para los “neutrinos de fondo”, verifique que la hipótesis de νs no relativistas para lograr $\Omega_\nu = 1$ está bien fundada.

(b) Demostrar que si un neutrino estable es no relativista en el momento de su desacople, su masa debe ser mayor que 2 GeV si $\Omega_\nu < 1$. Use que $\sigma v = G_F^2 m_\nu^2/(2\pi)$.

Equilibrio, desacople, entropía y recalentamiento de fotones

10. A partir del resultado del ejercicio 5 y usando la hipótesis de que el universo se expande adiabáticamente (conservación de la entropía), muestre que los neutrinos y los fotones tienen distintas temperaturas hoy. ¿Cuál es el motivo de esta diferencia?

    Ayuda. Tenga en cuenta todos los tipos de partículas con abundancias apreciables presentes en el universo en aquel tiempo. Preste particular atención a la conservación de la entropía y a los procesos de aniquilación.