COSMOLOGÍA - 1er cuatrimestre 2019

Prof. Esteban Calzetta
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 4: Radiación cósmica de fondo

B - Anisotropías de la radiación cósmica de fondo

1. Discuta y responda brevemente las siguientes cuestiones

   (a) ¿Es posible observar la radiación cósmica de fondo (RCF) directamente? ¿Cuáles son las observaciones *crudas* de los experimentos típicos COBE, WMAP, Planck? Cualitativamente, ¿cuáles son los pasos a seguir para obtener la luz propia de la RCF?

   (b) La radiación cósmica de fondo, ¿es un cuerpo negro? Si es así, ¿qué representan los gráficos usuales de la RCF?

   Ayuda. Puede ser de utilidad leer uno de los últimos trabajos de la colaboración Planck. *Planck 2018, results. VI. Cosmological parameters*, arXiv:1807.06209v1 [astro-ph.CO]

2. **Efectos cinemáticos.**

   (a) Sea $f(\omega, \Omega)$ la función de distribución que da el número de fotones por unidad de volumen, en un intervalo de frecuencias $\mathrm{d}\omega$ y con dirección de propagación dentro del ángulo sólido $\mathrm{d}\Omega$ que ve un observador O. Si O' es otro observador que se mueve con una velocidad V respecto de O, mostrar que la función de distribución que ve O' satisface

$$f'(\omega', \Omega') = \left(\frac{\omega'}{\omega}\right)^2 f(\omega, \Omega) \tag{1}$$

   (b) Demostrar que si O ve un espectro de cuerpo negro a temperatura T, el observador O' verá una temperatura

$$T' = \frac{T}{\gamma(1 - V\cos\theta'/c)} \tag{2}$$

   donde θ' es el ángulo respecto de su dirección de movimiento del cual recibe la radiación, $\gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ y V es la velocidad relativa entre observadores.

   (c) A partir de los resultados anteriores podríamos preguntarnos qué espectro de fluctuaciones se observaría desde la Tierra aún cuando la RCF fuera exactamente homogénea e isótropa. En consecuencia concluiríamos que existen al menos dos contribuciones a las fluctuaciones: las cinemáticas y las intrínsecas. ¿A qué se debe cada una?

   (d) Usando la ecuación (2) deduzca las amplitudes del dipolo y del cuadrupolo cinemáticos, ¿cuál es el monopolo?. Definiendo la anisotropía adimensional como $\Theta \equiv \Delta T/T \equiv (T' - T)/T$, ¿cuál es el valor del monopolo (por definición) y de los dos siguientes multipolos de Θ?

   Ayuda. Tome algún desarrollo de la ecuación (2), interprete y justifique cada término de la serie como monopolar, dipolar, cuadrupolar, etc.

   (e) Sabiendo que la amplitud medida del dipolo de la radiación de fondo es $\Theta_{\mathrm{dip}} \sim 1.24\times10^{-3}$ y que el cuadrupolo intrínseco (i.e., no cinemático) es del orden de 10^{-5} ¿Es posible asegurar que el cuadrupolo cinemático es despreciable?

3. Desde las primeras mediciones de la radiación cósmica de fondo en los laboratorios Bell en el año 1964, pasando por los satélites COBE y WMAP, hasta las más recientes del satélite Planck en 2018 hemos aprendido que existe un fondo de fotones proveniente de universo temprano que se propaga casi libremente desde la superficie de último scattering hasta nuestros detectores hoy. Si bien su temperatura media es 2.73 K tiene fluctuaciones del orden 10^{-5}. Discuta y responda brevemente

   (a) ¿Qué causa estas fluctuaciones?, ¿podría diferenciar entre fluctuaciones primarias y secundarias? Enumere los efectos que considera más relevantes.

   (b) A grandes rasgos podríamos dividir el espectro multipolar en grandes escalas, intermedias y pequeñas. ¿Cuál es la escala característica de cada uno de los efectos mencionados?

4. **Variancia cósmica.** Para describir las perturbaciones en la temperatura de la RCF es útil transformar la dependencia con la dirección de arribo de los fotones $\hat{n}$ en una descomposición en armónicos esféricos, $Y_{lm}(\hat{n})$, según

$$\frac{\delta T}{T_0}(\vec{x}_0, \hat{n}, \eta_0) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(\vec{x}_0, \eta_0) Y_{lm}(\hat{n}). \tag{3}$$

   La cantidad $\vec{x}_0$ significa que observamos los fotones aquí en la Tierra (o en un satélite) y η_0 hoy (tiempo conforme). Lo que se puede medir es la cantidad $a_{lm}(\vec{x}_0, \eta_0)$. Sin embargo solo sus propiedades estadísticas son de interés cosmológico, por ejemplo, los promedios $\langle \ldots \rangle$ sobre el lugar de observación $\vec{x}_0$ o sobre repetidas realizaciones de la trayectoria de los fotones. En este caso la correlación sería

$$\langle a_{lm}\, a^*_{l'm'} \rangle = \delta_{ll'} \delta_{mm'} C_l. \tag{4}$$

   Ninguno de estos promedios son posibles de hacer hoy (viernes). De modo que la única información estadística a la cual podemos acceder gracias a la invariancia ante rotaciones, es el promedio sobre las proyecciones m, a saber

$$\frac{1}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} a_{lm}(\vec{x}_0, \eta_0)\, a^*_{l'm'}(\vec{x}_0, \eta_0) = C_l^{obs}. \tag{5}$$

   (a) Calcule la diferencia relativa cuadrática media entre C_l^{obs} y C_l asumiendo que la distribución de probabilidad es gaussiana.

   (b) ¿Qué concluye sobre las mediciones de la RCF en los diferentes rangos de multipolos l?

5. Considerando que el satélite COBE alcanzó una cobertura total del cielo con una resolución angular de $7°$, estime para qué rango de valores del momento multipolar l es posible una adecuada caracterización de las anisotropías del fondo cósmico de radiación ¿Cuál es el proceso físico dominante responsable de las fluctuaciones en la radiación cósmica de fondo para estas escalas angulares? Repita el mismo análisis para los satélites WMAP y Planck asumiendo resoluciones angulares de $0.23°$ y $5'$ respectivamente.

6. **El efecto Sachs-Wolfe.** Las fluctuaciones en la temperatura para escalas grandes, $k\,\eta_{rec} \ll 1$, están dominadas por el efecto Sachs-Wolfe según

$$\frac{\delta T(\vec{x}_0, \hat{n}, \eta_0)}{T_0} = \frac{1}{3c^2} \delta\phi\left(r_L\, \hat{n}, \eta_{rec}\right). \tag{6}$$

En este mismo régimen la correlación para las fluctuaciones del potencial gravitatorio, en el tiempo de recombinación, corresponde con el espectro de fluctuaciones iniciales. En consecuencia el espectro, invariante ante rotaciones y traslaciones, sigue una ley de potencias tal que

$$\left\langle \delta\phi(\vec{q},\eta_{rec})\,\delta\phi(\vec{q}\,',\eta_{rec})\right\rangle = \delta(\vec{q}+\vec{q}\,')\,N_\phi^2\,q^{n_s-4}. \tag{7}$$

(a) Calcule los C_l's. ¿Cuál es la dependencia con r_L, n_s y N_ϕ?

Ayuda. Puede ser útil la relación $e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_l (2l+1) i^l\, P_l(\hat{q}\cdot\hat{n})\, j_l(qr)$, con $j_l(qr)$ las funciones esféricas de Bessel.

(b) Asumiendo un espectro de Harrison-Zel'dovich, $n_s = 1$, muestre que $l(l+1)C_l$ no depende ni de r_L ni de l.

(c) Este comportamiento solo es relevante a escalas grandes (multipolos pequeños), ¿por qué?. Estime cuál es el rango de multipolos en el que este resultado domina la correlación TT de la RCF.

7. **Oscilaciones acústicas de bariones.** En un universo con materia oscura, bariones y radiación, las perturbaciones iniciales crean desbalances gravitatorios en la materia y de presión en el fluido de bariones y fotones. Como consecuencia, en escalas pequeñas dentro del horizonte, aparecen ondas de sonido. Pensemos en una onda de sonido esférica que es creada en una región sobredensa del universo muy temprano ($t \approx 0$). Esta onda se propagará hasta el momento del último scattering en el cual la presión es liberada, la velocidad del sonido esencialmente decae a cero, y la onda queda congelada en una esfera a una distancia fija s_*. Estas ondas son las oscilaciones acústicas de bariones. De aquí podemos obtener dos efectos observables. El primero es que parte de la perturbación en los bariones que se encontraba al comienzo junto con la perturbación inicial de materia oscura se desplazó a la cáscara de una esfera con radio s_*. De modo que al final obtendremos una pertubación en la densidad de bariones justo en una cáscara esférica de radio s_* alrededor de la perturbación inicial. El segundo está relacionado con máximos en la perturbación de la temperatura de los fotones de la radiación cósmica de fondo cuya longitud de correlación es s_*.

Obviamente, este es el caso para una perturbación en un punto particular. No obstante, las perturbaciones iniciales excitan ondas esféricas en todos los puntos con una cierta distribución estadística.

Las ecuaciones gravitatorias y de Boltzmann, en el límite hidrodinámico y de acoplamiento fuerte, permiten describir la dinámica de los fotones considerando solo los multipolos más bajos (monopolo Θ_0 y dipolo Θ_1). A su vez esta dinámica puede reducirse a una única ecuación para el monopolo de la distribución de fotones, $\Theta_0 = (\delta T/T)_0$. A saber

$$\Theta_0''(k,\eta) + \frac{a'}{a}\frac{R}{1+R}\Theta_0'(k,\eta) + k^2 c_s^2 \Theta_0(k,\eta) = F_{\rm grav}, \tag{8}$$

con $c_s^2 = dP_{\mathrm{b}\gamma}/d\rho_{\mathrm{b}\gamma}$ la velocidad del sonido en el plasma de bariones y fotones, k el momento comóvil, $R = 3\rho_{\rm b}/4\rho_\gamma$, $F_{\rm grav}$ un forzado que depende de las pertubaciones de los potenciales gravitatorios y $f' = df/d\eta$ con η el tiempo conforme. Esta ecuación muestra la dinámica del plasma de fotones y bariones (lado izquierdo) acoplada a las perturbaciones gravitatorias dominadas por la materia oscura (lado derecho).

(a) Obtenga una ecuación más simple en el límite de pequeñas escalas y despreciando los efectos gravitatorios perturbativos.

(b) Asumiendo una condición inicial $\Theta_0 = \Theta_0(0)$ tal que para tiempos tempranos (o escalas grandes) las perturbaciones se mantienen constantes y que la velocidad del sonido varía lentamente (aproximación adiabática o WKB), obtenga la solución.

(c) Considerando solamente la parte oscilatoria ¿Cuál es el comportamiento para escalas fuera y dentro de horizonte?, ¿es lo que esperaba?

(d) Utilizando 7b, estime las posiciones de los "picos" del espectro de la correlación de temperatura de la RCF $\Delta_{\rm TT}(l)$. Es decir, las posiciones angulares y multipolares de los máximos de $\langle(\delta T/T_0)^2\rangle \sim \Theta_0^2$.

(e) Compare sus resultados con los de *Planck 2018, results. VI. Cosmological parameters*, arXiv:1807.06209v1 [astro-ph.CO]

8. **Amortiguamiento de las fluctuaciones.** Para lograr un desarrollo completo de las fluctuaciones de la RCF es importante incorporar efectos disipativos. Existen al menos dos efectos que contribuyen a la disipación, y por ende a la reducción de la amplitud de las perturbaciones. El primero, denominado *Silk damping*, proviene de que los fotones poseen un camino libre medio finito aún en el régimen de acoplamiento fuerte del plasma de bariones y fotones. En consecuencia, en escalas menores a la longitud de difusión, los fotones se encuentran desacoplados de los bariones y las fluctuaciones en la temperatura están dominadas por el efecto difusivo. El segundo, denominado *Landau damping*, está vinculado con que el fenómeno de último scattering de los fotones no es instantáneo sino que es un proceso que sucede en un intervalo finito de tiempo generando una *cáscara gruesa* de último scattering. Si consideramos escalas que son menores que el grosor de esa cáscara entonces varios máximos y mínimo de temperatura se ubicarán en la línea de visión. Por ello las fluctuaciones en esas pequeñas escalas están fuertemente promediadas. El grosor de esta cáscara de último scattering es del orden de la longitud de difusión de los fotones. De este modo ambos efectos son relevantes en las mismas escalas.

   Para describir el primer efecto es necesario incorporar el término cuadrupolar Θ_2 en las ecuaciones dinámicas. Este nuevo término es una corrección de orden $1/\tau'$ [1], con $\tau' = x_e n_e \sigma_T a$ la tasa de scattering de Thomson. Si consideramos escalas pequeñas podemos despreciar los efectos gravitatorios y el sistema de ecuaciones puede reducirse a

$$\Theta_0'' + \frac{k^2 c_s^2}{\tau'}\left(\frac{4}{5} + \frac{R^2}{1+R}\right)\Theta_0' + k^2 c_s^2 \Theta_0 = 0. \tag{9}$$

   (El factor 4/5 cambia a 16/15 si tenemos en cuenta la polarización.)

   (a) Utilizando (9), halle la dependencia temporal de Θ_0 a primer orden en $1/\tau'$ y muestre que corresponde a una oscilación amortiguada exponencialmente.

   (b) Encuentre una expresión para la escala característica de difusión $\lambda_D(\eta)$ válida hasta el tiempo de recombinación $\eta = \eta_{\rm rec}$.

   (c) Grafique $\lambda_D(\eta)$ y estime la escala multipolar característica l_D final (para el tiempo de recombinación) en la aproximación más simple que se le ocurra.

   (d) Un argumento heurístico pero más simple para determinar esta escala $\lambda_D(\eta)$ es pensar en que los fotones hacen una caminata al azar entre los electrones de a pasos $\lambda_{\rm CLM} = 1/\tau'$. La escala $\lambda_D(\eta)$ será la distancia media recorrida por un fotón en un tiempo η. En este esquema, ¿podría estimar $\lambda_D(\eta)$?, ¿recupera la misma dependencia que en 8b?

[1] En el límite de acoplamiento fuerte es posible despreciar este término cuadrupolar (como se hizo en 7), pero es solo una aproximación.

Ayuda. Piense cómo se relaciona $\lambda_D(\eta)$ y $\lambda_{\rm CLM}$ en función del número de colisiones para una caminata al azar.

9. **Propagación libre.** La ecuación de Boltzmann para los modos de Fourier de las fluctuaciones en la temperatura de los fotones $\Theta(\vec{k}, \hat{n}, \eta) \equiv \Delta T/T$ puede escribirse como

$$\dot{\Theta} + ik\mu\Theta = -\tau'\Theta + S \tag{10}$$

donde $\mu = \hat{k} \cdot \hat{n} = \cos\theta$, siendo θ el ángulo entre el vector de onda $\vec{k}$ y la dirección de propagación $\hat{n}$, y S es el término de fuente que depende de las fluctuaciones en los potenciales gravitatorios. Las derivadas son respecto al tiempo conforme $d\eta = c\,dt/a(t)$, y $\tau' = x_{\rm e} n_{\rm e} \sigma_{\rm T} a$ es la tasa de scattering de Thomson ($x_{\rm e}$ es la fracción de electrones libres).

   (a) Asumiendo que desde el momento en el que se produce la superficie de último scattering, los fotones se propagan libremente y despreciando el término de fuente es posible hallar una aproximación al espectro multipolar de las fluctuaciones en temperatura hoy, $\Theta_l(k, \eta_0)$. En efecto, encuentre $\Theta_l(k, \eta_0)$ a partir de la ecuación (10) como función de las fluctuaciones en el tiempo de desacople $\Theta_l(k, \eta_*)$. Recuerde que en la aproximación de acoplamiento fuerte puede considerar solo el monopolo y el dipolo como relevantes.

   (b) ¿Cuáles son las escalas (en longitud de onda o en número de onda) que contribuyen predominantemente a cada multipolo l hoy? ¿Es lo que esperaba por argumentos geométricos?

   Ayuda. Tome la solución $\Theta_l(k, \eta_0)$ hallada en 9a y estudie la relación entre k y l solamente para el término que depende de $\Theta_0(k, \eta_*)$.

10. **Reionización.** Para estudiar los cambios en las fluctuaciones debidos al proceso de reionización utilizamos nuevamente la ecuación (10), pero ahora sólo despreciando el término de fuente S.

   (a) Demostrar que la reionización del Universo provoca una reducción de los momentos multipolares Θ_l por un factor $e^{-\tau_{\rm ri}}$, donde $\tau_{\rm ri} = \int_{\eta_{\rm ri}}^{\eta_0} \tau'(\eta)\, d\eta$ es la profundidad óptica debida a la reionización. Básicamente la reionización ayuda a reducir las fluctuaciones y reestablecer la isotropía. ¿Este efecto actúa en todas las escalas multipolares? Si no es así, ¿en cuáles?.

   (b) Investigar las estimaciones actuales para el parámetro $\tau_{\rm ri}$. Calcular para qué valor de corrimiento al rojo $z_{\rm ri}$ ocurrió la reionización si ésta fue total y repentina. Suponer que el Universo es espacialmente plano, con $\Omega_{\rm b} h^2 = 0.022$, $\Omega_\Lambda = 0.7$ y $H_0 = 67$ km s^{-1} Mpc^{-1}.

11. **C**ode for **A**nisotropies in the **M**icrowave **B**ackground - **CAMB**. Utilizando el código CAMB es posible obtener el espectro angular de las anisotropías de la RCF a partir de las ecuaciones de Boltzmann acopladas. Así, podemos estudiar su dependencia con los parámetros cosmológicos. (En la próxima guía nos ocuparemos de la polarización). Asumiendo el modelo cosmológico estándar, universo plano con los siguientes parámetros:

   - $\Omega_\Lambda = 0.684$
   - $\Omega_{\rm m} = 0.316$
   - $\Omega_{\rm b} = 0.049$
   - $h = 0.673$; recuerde que $H_0 = 100\,h$ km s^{-1} Mpc^{-1}

(a) Grafique el espectro angular de potencias de las fluctuaciones en temperatura, en el plano $l(l+1)C_l/2\pi$ versus l. ¿Por qué es conveniente utilizar esta expresión en la coordenada y? ¿Qué representa el valor de l?

(b) Ahora estudiamos la dependencia del espectro angular de fluctuaciones con los parámetros cosmológicos asumidos. Varíe los siguientes parámetros, de a uno por vez, respecto de los asumidos en el item anterior. En cada caso, muestre los resultados en un gráfico e interprete. En particular explique por qué se detectan (o no) variaciones en la ubicación y/o amplitud de los picos, y por qué cambia (o no) la dependencia de la curva para escalas grandes. Los parámetros cosmológicos no son independientes, por lo tanto al variar uno se debe tomar algún criterio claro de cómo cambian el resto de los parámetros.

   i. Curvatura: varíe $\Omega_{\rm tot} = \Omega_\Lambda + \Omega_{\rm m}$ entre 0.2 y 1, respetando la propoción $\Omega_{\rm m}/\Omega_\Lambda = 0.3/0.7$.

   ii. Energía oscura: varíe Ω_Λ entre 0 y 0.9, para un universo plano.

   iii. Densidad de materia: varíe $\Omega_{\rm m}h^2$ entre 0 y 0.5, para un universo plano.

   iv. Densidad de bariones: varíe $\Omega_{\rm b}h^2$ entre 0.01 y 0.06, manteniendo fija la cantidad de materia total.