COSMOLOGÍA - 1er cuatrimestre 2019

Prof. Esteban Calzetta
Departamento de Física, FCEyN, UBA

Guía 5: Fluctuaciones en la materia y formación de estructuras

A - Evolución lineal de las fluctuaciones

1. La evolución lineal del espectro de potencias de la materia oscura $P(k,\eta)$ luego del desacople entre bariones y fotones está dado por

$$P(k,\eta) = [D_+(\eta)]^2\,[T(k)]^2\,P_p(k), \tag{1}$$

donde $D_+(\eta)$ es el factor de crecimiento lineal con $D_+(\eta_0) = 1$, $T(k)$ es la función de transferencia y $P_p(k)$ es el espectro de potencias primordial, $P_p(k) \sim (k/\mathcal{H})^4\,P_\Phi(k)$ donde $P_\Phi(k) \sim k^{n_s-4}$ es el espectro del potencial gravitatorio. La normalización de las amplitudes de los espectros está fijada por las observaciones. El valor $n_s = 1$ corresponde al espectro de Harrison-Zeldovich invariante de escala.

(a) Factor de crecimiento. Si pensamos en un universo con materia y constante cosmológica (o energía oscura, pero sin fluctuaciones), el factor de crecimiento $D_+(\eta)$ es la solución creciente de la ecuación

$$\frac{d^2D}{d\eta} + \mathcal{H}\,\frac{dD}{d\eta} = \frac{3}{2}\,\Omega_m\,\mathcal{H}^2 D, \tag{2}$$

donde $\mathcal{H}(\eta)$ es la constante de Hubble conforme $\mathcal{H} = (\mathrm{d}a/\mathrm{d}\eta)/a = Ha)$, η es el tiempo conforme y $\Omega_m(\eta)$ es la densidad de fondo de materia total en unidades de la densidad crítica.

i. Mostrar que la solución decreciente es $D_-(a) \propto \mathcal{H}(a)/a = H(a)$ y la creciente es

$$D_+(a) = C\,\frac{\mathcal{H}(a)}{a}\int_0^a \frac{da'}{\mathcal{H}^3(a')}, \tag{3}$$

con C una constante.

ii. Hallar C tal que $D_+(a) = a$ cuando $a \to 0$ para un universo plano con cantidades arbitrarias de materia y energía oscura. Fijar además $a(\text{hoy}) = a_0 = 1$. Utilizando la normalización calculada integrar numéricamente la ecuación (3) para hallar el factor de crecimiento D_+ como función de a para un universo plano en los casos ($\Omega_{\rm m0} = 1, \Omega_\Lambda = 0$), ($\Omega_{\rm m0} = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$) y ($\Omega_{\rm m0} = 0.5, \Omega_\Lambda = 0.5$). ¿Qué diferencias y qué similitudes encuentra entre las soluciones? ¿Qué puede concluir acerca del crecimiento de las estructuras en nuestro universo ($\Omega_{\rm m0} = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$) respecto de un dominio puro de materia? ¿Estas conclusiones dependen de la normalización elegida?

Ayuda. Para hacer el desarrollo de $D_+(a)$ cuando $a \to 0$ es conveniente utilizar algún programa con lenguaje simbólico, e.g. Mathematica o Sage. Por otro lado para responder las preguntas sobre el crecimiento de las estrucutras en distintos universo, es posible definir una cantidad f que mida la tasa de crecimiento relativo de las fluctuaciones. Utilice esta función $f = \mathrm{d}\ln D/\mathrm{d}\ln a$ para comparar entre los distintos universos.

(b) Función de transferencia.

i. Derive (o recuerde de ejercicios anteriores) el redshift $z_{\rm eq}$ para el cual el universo pasa del dominio de la radiación al de la materia. Calcule el número de onda comóvil $k_{\rm eq} \simeq \mathcal{H}(z_{\rm eq})$ como función de Ω_m y Ω_γ.

ii. Utilizando CAMB y asumiendo los parámetros cosmológicos de Planck 2018 obtenga, a orden lineal, el espectro de potencias de la materia y la función de transferencia para $z = 0$.

iii. ¿Cuál es la relación entre el espectro de potencias y la función de transferencia?

iv. Estudie las asíntotas del espectro de potencias para $k \to 0$ y $k \to \infty$. ¿Corresponde con lo que esperaba? ¿Por qué?

v. Para los parámetros dados calcule $k_{\rm eq}$ en unidades de h/Mpc. ¿Podría estimar este valor a partir del espectro de materia que calculó con CAMB? Explique cómo y por qué.

2. Es útil considerar las amplitudes de las fluctuaciones de sobredensidad δ y de masa relativa $\delta M/\bar{M}$ integradas sobre una escala de referencia R definidas como

$$\delta_R(\vec{x}) = \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)_R = \frac{1}{V}\int d^3\vec{x}'\,\delta(\vec{x}')W_R(\vec{x}-\vec{x}'), \tag{4}$$

donde V es el volumen y $W_R(x)$ es igual a 1 para $|x| < R$ y cero en otro caso. En consecuencia es usual considerar el valor RMS de las cantidades mencionadas para describir la amplitud de las fluctuaciones en la materia de modo que

$$\sigma_R^2 = \left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)_R^2 \right\rangle = \left\langle \delta_R^2 \right\rangle \tag{5}$$

La convención standard es elegir $R = 8\,h^{-1}$ Mpc, lo cual define un parámetro cosmológico llamado σ_8.

(a) Muestre que

$$\sigma_R^2 = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty dk\, k^2 P(k) W^2(kR) \tag{6}$$

donde $W(x) = (3/x^3)(\sin x - x\cos x)$.

(b) En consecuencia utilice el espectro obtenido con CAMB y calcule σ_8.

(c) Disminuya el contendio de materia oscura en un 20%, vuelva a correr CAMB y calcule σ_8 y Ω_{m0}. Explique por qué σ_8 aumenta o disminuye.

3. La teoría lineal no puede ser válida cuando las fluctuaciones relativas en la densidad son mayores a la unidad, $\delta \gg 1$. Existe una manera de estimar cuál es la escala $k_{\rm nl}$ en la que deja de funcionar la aproximación lineal, utilizando el espectro adimensional $\Delta^2(k) = k^3P(k)/2\pi^2$, y es $\Delta(k_{\rm nl}) \sim 1$, donde $P(k)$ es el espectro lineal.

(a) Nuevamente utilizando CAMB encuentre el valor de la escala $k_{\rm nl}$ en unidades de h/Mpc a partir del espectro lineal en $z = 0$ y determine el rango en el que los efectos no lineales son importantes.

(b) Obtenga los espectros lineal y no lineal desde CAMB. Tome algún criterio cuantitativo y estime directamente con estos datos cuál es el rango en el que difieren ambos espectros.

(c) Repita 3a y 3b para $z = 2$. ¿Esta escala k_{nl} crece o decrece con el tiempo? Explique por qué.

(d) Grafique los espectros lineales y no lineales para $z = 0$ y $z = 2$ superpuestos mostrando la transición de un régimen al otro.

4. Evolución del bias. A partir de las observaciones de la materia luminosa (galaxias) pretendemos estimar propiedades de la materia oscura. Para ello debemos vincular la densidad de galaxias con la de materia oscura a través de algún modelo. A esa relación la llamamos bias. El modelo más simple se lo denomina bias lineal local, estudiemos alguna propiedad de esta relación.

   Asuma que las galaxias se forma en un tiempo dado, $t = t_*$, con una densidad δ_g que satisface la relación del bias lineal local $\delta_g = b_0 \delta_{\rm cdm}$ en ese tiempo inicial. Si el número de estos objetos se conserva[1] y su velocidad es igual a la de la materia oscura muestre que a orden lineal el factor de bias $b = \delta_g/\delta_{\rm cdm}$ evoluciona a la unidad y que además sigue siendo local.

   Ayuda. Utilice la ecuación de continuidad en variables comóviles tanto para las galaxias como para la materia oscura.

[1] Esta es una hipótesis muy fuerte debido a la posible colisión y/o acreción de estos objetos.