1 La teoría de Jeans en un Universo en expansión

La idea es explicar la teoría de Jeans para la evolución de pequeñas perturbaciones de un Universo de Friedmann-Robertson-Walker.

Las ecuaciones de Friedmann se pueden deducir de un modelo "newtoniano"

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{8\pi G}{3c^2}\rho - \frac{\epsilon c^2}{R^2 a^2} \\ \dot{\rho} + 3H(\rho + p) &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Estas dos ecuaciones juntas determinan la aceleración

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\rho + 3p) \tag{2}$$

El modelo consiste en la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + \nabla(\rho\vec{v}) + p\nabla\vec{v} = 0 \tag{3}$$

La ecuación de Euler

$$\dot{\vec{v}} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{c^2\nabla p}{\rho + p} - \nabla\phi \tag{4}$$

y la ecuación de Poisson

$$\mathbf{\Delta}\phi = \frac{4\pi G}{c^2}(\rho + 3p) \tag{5}$$

La solución homogénea corresponde al flujo de Hubble

$$\vec{v}_H = H\vec{x} \tag{6}$$

de donde

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_H = \dot{H}\vec{x} + H\frac{d}{dt}\vec{x} = \left[\dot{H} + H^2\right]\vec{x} \tag{7}$$

si queremos expresar esto como una "aceleración de la gravedad"

$$\frac{d}{dt}\vec{v}_H = -\nabla\phi_H \tag{8}$$

entonces

$$\phi_H = -\frac{1}{2}\left[\dot{H} + H^2\right]x^2 \tag{9}$$

Ahora consideramos una pequeña perturbación

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_H(1 + \delta) \\ \vec{v} &= H\vec{x} + \delta\vec{v} \\ \phi &= -\frac{1}{2}\left[\dot{H} + H^2\right]x^2 + \varphi \end{aligned} \tag{10}$$

con la ecuación de estado $p = \omega\rho$. Entonces

$$\begin{aligned} \dot{\delta} + H(\vec{x}\nabla)\delta + (1+\omega)\nabla(\delta\vec{v}) &= 0 \\ \delta\dot{\vec{v}} + H(\vec{x}\nabla)\delta\vec{v} + H\delta\vec{v} &= -\frac{c^2\omega\nabla\delta}{(1+\omega)} - \nabla\varphi \\ \mathbf{\Delta}\varphi &= -3\left[\dot{H} + H^2\right]\delta \end{aligned} \tag{11}$$

Para que las ecuaciones queden homogéneas definimos una nueva variable

$$\vec{x} = a\vec{r} \tag{12}$$

de manera que

$$\dot{\delta} + H\left(\vec{x}\nabla\right)\delta = \left.\frac{\partial\delta}{\partial t}\right|_{\vec{r}} \tag{13}$$

Etc. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a}\left(1+\omega\right)\nabla_{\vec{r}}\left(\delta\vec{v}\right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\delta\vec{v} + H\delta\vec{v} &= -\frac{c^2\omega\nabla_{\vec{r}}\delta}{a\left(1+\omega\right)} - \frac{1}{a}\nabla_{\vec{r}}\varphi \\
\boldsymbol{\Delta}_{\vec{r}}\varphi &= -3a^2\left[\dot{H}+H^2\right]\delta
\end{aligned} \tag{14}$$

Conviene definir

$$\delta\vec{v} = \frac{1}{a}\vec{u} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\left(1+\omega\right)\nabla_{\vec{r}}\left(\vec{u}\right) &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\vec{u} &= -\frac{c^2\omega\nabla_{\vec{r}}\delta}{\left(1+\omega\right)} - \nabla_{\vec{r}}\varphi \\
\boldsymbol{\Delta}_{\vec{r}}\varphi &= -3a^2\left[\dot{H}+H^2\right]\delta
\end{aligned} \tag{16}$$

Si $\vec{u}$ es un rotor, entonces es constante y $\delta = \varphi = 0$. El caso interesante es cuando $\vec{u} = \nabla_{\vec{r}}\theta$. Entonces

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial t} + \frac{1}{a^2}\left(1+\omega\right)\boldsymbol{\Delta}_{\vec{r}}\theta &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\theta &= -\frac{c^2\omega\delta}{\left(1+\omega\right)} - \varphi \\
\boldsymbol{\Delta}_{\vec{r}}\varphi &= -3a^2\left[\dot{H}+H^2\right]\delta
\end{aligned} \tag{17}$$

Transformando Fourier

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta}{\partial t} - \frac{1}{a^2}\left(1+\omega\right)k^2\theta &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial t}\theta &= -\frac{c^2\omega\delta}{\left(1+\omega\right)} - \varphi \\
k^2\varphi &= 3a^2\left[\dot{H}+H^2\right]\delta
\end{aligned} \tag{18}$$

O sea

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \frac{1}{a^2}\left(1+\omega\right)\left[\frac{c^2\omega k^2}{\left(1+\omega\right)} + 3a^2\left[\dot{H}+H^2\right]\right]\delta = 0 \tag{19}$$

Cuando $k \to \infty$, vemos ondas de sonido con velocidad $c_s^2 = \omega c^2$, que es correcto.

En general, tenemos que $a \propto t^{2/(3(1+\omega))}$, y en el límite $k \to 0$ resulta $\delta \propto t^{\alpha_\pm}$, con $\alpha_- = -1$

$$\alpha_+ = \frac{2\left(1+3\omega\right)}{3\left(1+\omega\right)} \tag{20}$$

Es notable que en el modo creciente, φ permanece constante.

2 Transiciones entre eras

Ahora nos preguntamos qué pasa cuando pasamos de una era a otra con un valor distinto de ω. Para esta cuenta conviene adoptar a, en vez de t, como variable independiente.

Recordemos que

$$\frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial t} = a\frac{\partial}{\partial a} \tag{21}$$

de modo que las ecuaciones son

$$\begin{aligned} a\frac{\partial\delta}{\partial a} - \frac{1}{a^2 H}(1+\omega)k^2\theta &= 0 \\ a\frac{\partial}{\partial a}\theta &= -\frac{c^2\omega\delta}{(1+\omega)H} - \frac{1}{H}\varphi \\ k^2\varphi &= 3a^2\left[\dot{H}+H^2\right]\delta \end{aligned} \tag{22}$$

Además

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 a^{-3(1+\omega)} \\ H &\propto a^{-3(1+\omega)/2} \\ \frac{\ddot{a}}{a} &= \dot{H}+H^2 = \frac{-1}{2}(1+3\omega)H^2 \end{aligned} \tag{23}$$

Finalmente

$$\left[a\frac{\partial}{\partial a}\right]^2\delta + \frac{1}{2}(1-3\omega)a\frac{\partial\delta}{\partial a} + \frac{1}{a^2}(1+\omega)\left[\frac{c^2\omega k^2}{(1+\omega)H^2} - \frac{3}{2}(1+3\omega)\right]\delta = 0 \tag{24}$$

En el límite $k\to 0$, $\delta\propto a^{\alpha}$,

$$\alpha^2 + \frac{1}{2}(1-3\omega)\alpha - \frac{3}{2}(1+3\omega)(1+\omega) = 0 \tag{25}$$

De manera que

$$\delta = Aa^{1+3\omega} + Ba^{-3(1+\omega)/2} \tag{26}$$

y en consecuencia

$$\theta = \frac{a^2 H}{k^2}\left[\frac{(1+3\omega)}{(1+\omega)}Aa^{1+3\omega} - \frac{3}{2}Ba^{-3(1+\omega)/2}\right] \tag{27}$$

Por lo tanto, si pasamos de la era $-$ con $\omega=\omega_-$ a la era $+$ con $\omega=\omega_+$ en el punto $a=1$, entonces

$$\begin{aligned} A_+ + B_+ &= A_- + B_- \\ \frac{(1+3\omega_+)}{(1+\omega_+)}A_+ - \frac{3}{2}B_+ &= \frac{(1+3\omega_-)}{(1+\omega_-)}A_- - \frac{3}{2}B_- \end{aligned} \tag{28}$$

o sea

$$\begin{aligned} B_+ &= B_- + \frac{(\omega_+ - \omega_-)}{(1+\omega_-)(5+6\omega_+)}A_- \\ A_+ &= \frac{(1+\omega_+)(5+6\omega_-)}{(1+\omega_-)(5+6\omega_+)}A_- \end{aligned} \tag{29}$$

Claramente algo raro pasa cuando la era $-$ corresponde a inflacion.

3 El espectro de Harrison-Zel'dovich

El espectro de Harrison-Zel'dovich es tal que la fluctuación en la *masa* en el momento de entrada al horizonte es independiente de escala.

Si la fluctuación fraccional en la densidad es δ, la fluctuacion en la masa sobre una escala R es

$$\frac{\delta M}{\bar{M}} = \frac{3}{4\pi R^3}\int d^3r\ \delta \tag{30}$$

Si además

$$\langle \delta\left(\vec{r}\right)\delta\left(\vec{r}'\right)\rangle = \int \frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3} e^{i\vec{k}\left(\vec{r}-\vec{r}'\right)}\sigma_k \tag{31}$$

entonces

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)^2 \right\rangle = \frac{3}{R^3}\int \frac{d^3k}{\left(2\pi\right)^3}\sigma_k \int_0^R dr\ r^2\frac{\sin\left(kr\right)}{kr} \tag{32}$$

Ahora

$$\int_0^R dr\ r^2\frac{\sin\left(kr\right)}{kr} = \frac{1}{k^3}\left[\sin kR - kR\cos kR\right] \approx \frac{1}{3}R^3\theta\left(1-kR\right) \tag{33}$$

Esta integral sirve como una función ventana. Si además $\sigma_k \propto k^n$, entonces

$$\left\langle \left(\frac{\delta M}{\bar{M}}\right)^2 \right\rangle \propto \frac{4\pi}{\left(3+n\right)}R^{-(n+3)} \tag{34}$$

por lo tanto el espectro de Harrison-Zeldovich requiere $n = -3$ *en el momento de entrar al horizonte*, es decir, cuando $k = R^{-1} = aH\left(a\right)/c$.

Durante la era dominada por la materia $H = H\left(a_{equiv}/a\right)^{3/2}$, y el modo k entra al horizonte cuando $a/a_{equiv} = \left(H_{equiv}a_{equiv}/ck\right)^2$. Desde equivalencia hasta entrar al horizonte el modo crece por un factor a/a_{equiv} y σ_k crece por un factor $\left(a_{equiv}/a\right)^2 \propto k^{-4}$, de modo que para obtener $\sigma_k \propto k^{-3}$ al momento de entrar al horizonte, hace falta que $\sigma_k \propto k$ al momento de equivalencia.

References

[1] P. J. E. Peebles, *The Principles of Physical Cosmology* (Princeton UP, Princeton, 1993).

[2] J. A. S. Lima, V. Zanchin y R. Brandenberger, *On the Newtonian cosmology equations with pressure*, Mon. Not. R. Astron. Soc. 291, Ll-U (1997).