1 Relatividad general

1.1 Vectores y tensores

El principio más básico de la Relatividad General es que el espacio-tiempo se puede describir como una *variedad de cuatro dimensiones*. Esto quiere decir que el espacio tiempo es un conjunto, y cada elemento de ese conjunto pertenece a su vez a un subconjunto que es isomorfo a $\mathbf{R}^4$. Es decir, si P pertenece a la variedad $\mathcal{M}$, entonces P es la imagen de algún punto $x_P = \left(x_P^0, x_P^1, x_P^2, x_P^3\right)$ en $\mathbf{R}^4$ según alguna función biunívoca ϕ de $\mathbf{R}^4$ en $\mathcal{M}$, definida en algún conjunto abierto $\mathcal{O}$ que contiene a x_P. Definiendo que los conjuntos abiertos de $\mathcal{M}$ son las imágenes de los conjuntos abiertos de $\mathbf{R}^4$ según estos mapas (por lo cual ϕ es continua), la identificación $P \leftrightarrow x_P$ nos permite construír un "sistema de coordenadas" en un entorno de P.

Una función ψ de $\mathcal{M}$ a $\mathbf{R}$ define una función de $\mathbf{R}^4$ en $\mathbf{R}$ de acuerdo con la construcción $\Psi\left(x_P\right) = \psi\left(P\right)$. La función Ψ tiene un diferencial

$$d\Psi = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} dx^\mu \tag{1}$$

$0 \leq \mu \leq 3$, y estamos usando la convención de Einstein. Supongamos que el punto P pertenece a dos sistemas de coordenadas distintos, el sistema en que las coordenadas de P son los x_P^μ y el sistema en que las coordenadas son los ξ_P^α. La función que conecta x_P son ξ_P para cada P es un isomorfismo de $\mathbf{R}^4$ en sí mismo. En el nuevo sistema de coordenadas podríamos definir

$$d\bar{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha} d\xi^\alpha \tag{2}$$

pero de hecho $d\bar{\Psi} = d\Psi$, porque

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \xi^\alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \tag{3}$$

$$d\xi^\alpha = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} dx^\nu \tag{4}$$

y

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{5}$$

es la delta de Kronecker. En general, decimos que una función Ψ que es invariante frente a cambios de coordenadas (en el sentido que $\bar{\Psi}\left(\xi_P\right) = \Psi\left(x_P\right)$) define un escalar. Un conjunto de cuatro funciones A_μ que se transforman como las derivadas de un escalar definen un *vector covariante*

$$\bar{A}_\alpha\left(\xi_P\right) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \xi^\alpha} A_\mu\left(x_P\right) \tag{6}$$

Un conjunto de cuatro funciones A^μ que se transforman como los diferenciales de las coordenadas definen un *vector contravariante*

$$\bar{A}^\alpha\left(\xi_P\right) = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} A^\mu\left(x_P\right) \tag{7}$$

(nótese que la "contracción" $A_\mu B^\mu$ de un vector covariante y otro contravariante define un escalar). Un tensor mixto de orden (n, m) es un conjunto de funciones $T^{\mu_1 \cdots \mu_n}_{\nu_1 \cdots \nu_m}$ que se transforma como el producto de n vectores contravariantes y m vectores covariantes.

1.2 La métrica

El paso siguiente en la construcción del espacio-tiempo es dotar a la variedad $\mathcal{M}$ de un tensor dos veces covariante simétrico $g_{\mu\nu}$. Entonces

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\left(P\right) dx^\mu dx^\nu \tag{8}$$

define un escalar, que interpretamos como el "intervalo" entre los puntos x_P y $x_Q = x_P + dx$. Asumimos que $g_{\mu\nu}$ es una "métrica de Minkowski", es decir, que en cada punto la matriz $g_{\mu\nu}(P)$ tiene un autovalor negativo y tres positivos (a diferencia de las métricas de Riemann, que tienen todos sus autovalores positivos), ninguno de ellos nulo. Entonces, en cada punto P es posible definir un cambio de coordenadas

$$x^\mu_Q = \xi^\mu_P + M^\mu_\alpha(P)\left(\xi^\alpha_Q - \xi^\alpha_P\right) + \ldots \tag{9}$$

tal que

$$g_{\alpha\beta}(P) = M^\mu_\alpha(P)\, M^\nu_\beta(P)\, g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\alpha\beta} \tag{10}$$

donde $\eta_{\alpha\beta} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ es la métrica de Minkowski. Esto implica en particular que asociamos la coordenada x^0 con el autovector de $g_{\mu\nu}$ con autovalor negativo, es decir el tiempo, $x^0 = ct$.

Puesto que asumimos que $g_{\mu\nu}$ no tiene autovalores nulos, es invertible. Su inversa $g^{\mu\nu}$ es un tensor simétrico dos veces contravariante, tal que

$$g^{\mu\rho} g_{\rho\nu} = \delta^\mu_\nu \tag{11}$$

. En general, si A_μ es un vector covariante, entonces $A^\mu = g^{\mu\rho} A_\rho$ es contravariante, y viceversa.

También conviene definir

$$g = \det g_{\mu\nu} \tag{12}$$

Claramente $g < 0$.

1.3 Geodésicas

Dada una curva $x^\mu(r)$ en $\mathcal{M}$, que empieza en el punto $P = x^\mu(r_i)$ y termina en el punto $Q = x^\mu(r_f)$, entonces el intervalo entre P y Q se define como

$$S = \int_{r_i}^{r_f} dr\, \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}} \tag{13}$$

Una geodésica entre P y Q, si existe, es un extremo de S (nótese que S no depende de la parametrización particular que se use para calcularlo). Resolviendo el problema variacional, encontramos que la ecuación que define la geodésica es

$$\frac{d}{dr} \frac{\partial}{\partial\left(dx^\rho/dr\right)} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dr} \frac{dx^\nu}{dr}} \tag{14}$$

Desarrollando las derivadas, y usando que

$$\frac{d^2 x^\mu}{dr^2} = \frac{dx^\rho}{dr} \frac{\partial}{\partial x^\rho} \frac{dx^\mu}{dr} \tag{15}$$

encontramos que la ecuación geodésica se reduce a

$$\frac{dx^\rho}{dr} \nabla_\rho \frac{dx^\mu}{dr} = 0 \tag{16}$$

donde hemos introducido la *derivación covariante*

$$\nabla_\rho A^\mu = \frac{\partial A^\mu}{\partial x^\rho} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} A^\lambda \tag{17}$$

y Γ es la *conexión*

$$\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \left\{ g_{\rho\nu,\lambda} + g_{\lambda\nu,\rho} - g_{\rho\lambda,\nu} \right\} \tag{18}$$

Nótese que la conexión es simétrica en el par (ρ, λ)

$$\Gamma^\mu_{\rho\lambda} = \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \tag{19}$$

La derivación covariante se define para tensores arbitrarios pidiendo que la derivada covariante de un escalar coincida con la derivada ordinaria, y que valga la regla de Leibniz. Entonces, por ejemplo,

$$\nabla_\rho \left(A_\mu B^\mu\right) = A_{\mu,\rho} B^\mu + A_\sigma B^\sigma_{,\rho} \tag{20}$$

pero también

$$\nabla_\rho \left(A_\mu B^\mu\right) = \left(\nabla_\rho A_\mu\right) B^\mu + A_\sigma \left(B^\sigma_{,\rho} + \Gamma^\sigma_{\rho\mu} B^\mu\right) \tag{21}$$

Por lo tanto

$$\nabla_\rho A_\mu = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\rho} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} A_\lambda \tag{22}$$

En particular

$$\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0 \tag{23}$$

y

$$g_{,\rho} = g g^{\mu\nu} g_{\mu\nu,\rho} = 2g\Gamma^\lambda_{\rho\lambda} \tag{24}$$

La conexión NO es un tensor (la derivada covariante de un tensor sí es un tensor, de rango mayor). Ante un cambio de coordenadas

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\beta} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\gamma} \Gamma^\mu_{\rho\sigma} + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma} \tag{25}$$

1.4 Curvatura

Supongamos que ya hemos elegido un sistema de coordenadas tal que $g_{\mu\nu}(P) = \eta_{\mu\nu}$. Trabajando un poco más podemos asegurar que también $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P) = 0$. Efectivamente, ponemos

$$x^\mu_Q = \xi^\mu_Q + \frac{1}{2} M^\mu_{\alpha\beta}(P) \left(\xi^\alpha_Q - \xi^\alpha_P\right) \left(\xi^\beta_Q - \xi^\beta_P\right) + \ldots \tag{26}$$

y elegimos

$$M^\mu_{\alpha\beta}(P) = -\Gamma^\mu_{\alpha\beta}(P) \tag{27}$$

que siempre es posible gracias a la simetría de la conexión. Decimos que el sistema en el que $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}$ y la conexión se anula es *localmente inercial*.

Supongamos que el sistema x^μ que estamos usando ya es localmente inercial. ¿Podríamos matar igualmente las derivadas de la conexión? Ahora escribimos

$$x^\mu_Q = \xi^\mu_Q + \frac{1}{6} M^\mu_{\alpha\beta\gamma}(P) \left(\xi^\alpha_Q - \xi^\alpha_P\right) \left(\xi^\beta_Q - \xi^\beta_P\right) \left(\xi^\gamma_Q - \xi^\gamma_P\right) + \ldots \tag{28}$$

Derivando la regla de transformación de la conexión en P, usando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\beta}(P) &= \delta^\rho_\beta \\ \frac{\partial^2 x^\mu}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma}(P) &= 0 \end{aligned} \tag{29}$$

Encontramos que

$$\bar{\Gamma}^\alpha_{\beta\gamma,\delta}(P) = \Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\delta}(P) + \frac{\partial^3 x^\alpha}{\partial \xi^\beta \partial \xi^\gamma \xi^\delta}(P) \tag{30}$$

El problema es que la derivada tercera es simétrica en (β, γ, δ), pero la conexión sólo es simétrica en (β, γ). Para poder matar las derivadas de la conexión es necesario que se anule el *tensor de Riemann*

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} \tag{31}$$

de manera que las derivadas primeras de la conexión sean completamente simétricas. Esta es la expresión del tensor de Riemann en un sistema localmente inercial; en el caso general

$$R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Gamma^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Gamma^{\alpha}_{\gamma\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\delta} - \Gamma^{\alpha}_{\delta\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma} \tag{32}$$

Cuando el tensor de Riemann se anula, es posible encontrar un sistema en el que la conexión se anula idénticamente.

Nótense las simetrías del tensor de Riemann

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma} \tag{33}$$

1.5 El Teorema de Gauss

Como en la formulación matemática del electromagnetismo, el Teorema de Gauss juega un rol central en la formulación de la relatividad general.

Empecemos analizando la divergencia covariante de un vector contravariante

$$\nabla_\mu A^\mu = A^\mu_{,\mu} + \Gamma^\mu_{\rho\mu} A^\rho \tag{34}$$

Por la ec. (24) tenemos que

$$\Gamma^\mu_{\rho\mu} = \frac{1}{2}\frac{g_\rho}{g} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\sqrt{-g} \tag{35}$$

de modo que podemos escribir

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[\sqrt{-g}A^\rho\right] \tag{36}$$

El signo menos se pone porque sabemos que g es un número real negativo.

Ahora analizamos el elemento de volumen $d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3$. Ante un cambio de variables $x^\mu \to \xi^\alpha$, la fórmula de cambio de variable dice que

$$d^4\xi = |J|\; d^4x \tag{37}$$

donde

$$J = \det\left[\frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\rho}\right] \tag{38}$$

Por otro lado, por la regla de transformación de un tensor covariante tenemos que en el nuevo sistema

$$\bar{g} = \det\, g_{\alpha\beta} = \det\, \left[\frac{\partial x^\rho}{\partial \xi^\alpha} g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \xi^\beta}\right] = J^{-2} g \tag{39}$$

de modo que la combinación

$$Dx = \sqrt{-g}\; d^4x \tag{40}$$

define una medida de integración que es invariante frente a cambios de coordenadas.

El teorema de Gauss es un enunciado acerca de integrales del tipo

$$I = \int_V Dx\; \nabla_\mu A^\mu \tag{41}$$

sobre regiones del espacio tiempo. Como hemos visto, esto se reduce a

$$I = \int d^4x \, \frac{\partial}{\partial x^\rho} \left[\sqrt{-g} A^\rho \right] \tag{42}$$

a la que es posible aplicar el Teorema de Gauss habitual.

Empecemos considerando el caso en el que el dominio de integración es el volumen comprendido entre las hipersuperficies $x^1 = x_-$ y $x^1 = x_+$. El teorema de Gauss habitual dice que

$$I = \int dx^0 dx^2 dx^3 \, \left[\sqrt{-g} A^1 \right] \left(x^0, x_+, x^2 . x^3 \right) - (x_+ \leftrightarrow x_-) \tag{43}$$

Puesto que I es invariante, la combinación

$$dS_1 = dx^0 dx^2 dx^3 \, \sqrt{-g} \tag{44}$$

debe ser la componente 1 de un vector covariante. En general podemos escribir

$$dS_\mu = dS \, n_\mu \tag{45}$$

donde $n_\mu = \left(0, \left(g^{11} \right)^{-1/2}, 0, 0 \right)$ es la *normal exterior* al volumen considerado. Por lo tanto, en este caso el Teorema de Gauss se reduce al enunciado

$$I = \int_V Dx \, \nabla_\mu A^\mu = \int_{\partial V} dS \, n_\mu A^\mu \tag{46}$$

donde ∂V es el *borde* de V, y n^μ es, en cada caso, la normal exterior.

Ahora, cuando el borde de V incluye variedades orientadas espacialmente, tenemos problemas. Por ejemplo, consideremos el caso en que V es el volumen comprendido entre las hipersuperficies $x^0 = ct_-$ y $x^0 = ct_+$. En este caso, la normal exterior debiera ser

$$n^\mu = \left((|g_{00}|)^{-1/2}, 0, 0, 0 \right) \tag{47}$$

y por lo tanto $n_\mu = (-|g_{00}|)^{1/2} < 0$. En este caso, entonces

$$I = \int dx^1 dx^2 dx^3 \, \left[\sqrt{-g} A^1 \right] \left(ct_+, x^1, x^2 . x^3 \right) - (ct_+ \leftrightarrow ct_-) = \int_{\partial V} dS \, \left(-n_\mu A^\mu \right) \tag{48}$$

de manera que la expresión correcta del Teorema de Gauss, válida para cualquier volumen, es

$$I = \int_V Dx \, \nabla_\mu A^\mu = \int_{\partial V} dS \, \varepsilon \left(n_\mu A^\mu \right) \tag{49}$$

donde $\varepsilon = n_\mu n^\mu$.

1.6 Descripción de la materia

La idea básica en la forma en que se describe la dinámica de la materia en relatividad general es que la misma se expresa mediante una serie de leyes de conservación.

Supongamos una magnitud extensiva (número de partículas, carga eléctrica). Nos preguntamos por la cantidad de esta magnitud contenida en un volumen tridimensional $V^{(3)}$, comprendido entre los planos $x^1 = x_\pm$ en un instante t. Esta cantidad se expresa como una integral sobre V

$$Q(t) = \int_{V^{(3)}} dx^1 dx^2 dx^3 \, \sqrt{-g} \rho \tag{50}$$

donde ρ es la densidad de la cantidad Q. Como hemos visto, $\int dx^1 dx^2 dx^3 \, \sqrt{-g} = -dS \, n_0$ es la componente temporal de un vector covariante. Por lo tanto, para que Q sea invariante, ρ no puede ser un escalar, sino que debe ser la componente temporal de un vector contravariante, $\rho = J^0$, y obtenemos

$$Q(t) = \int_{V^{(3)}} S \, \varepsilon \, \left(n_\mu J^\mu \right) \tag{51}$$

Si la cantidad Q se conserva, la variación de Q entre dos instantes sucesivos t_- y t_+ se debe al flujo de la cantidad Q a traves del borde de $V^{(3)}$, es decir

$$Q(t_+) - Q(t_-) = -\int_{t_-}^{t_+} dt \int_{\partial V^{(3)}} dx^2 dx^3 \ (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) \tag{52}$$

donde $\mathbf{n}$ es la normal ordinaria y $\mathbf{j}$ es la corriente ordinaria. Agrupando, vemos que esto se puede escribir como

$$Q(t_+) - Q(t_-) = -\int_{[t_-,t_+]\times\partial V^{(3)}} dS \ (n_\mu J^\mu) \tag{53}$$

donde las componentes espaciales de la corriente $J^i = \mathbf{j}^i/c$, que tiene unidades de densidad. En resumen, la conservación de Q se puede expresar como

$$\int_{\partial V} dS \, \varepsilon \, (n_\mu J^\mu) = 0 \tag{54}$$

donde el volumen cuadridimensional $V = \left[t_-, t_+\right] \times V^{(3)}$; por el teorema de Gauss, esto se expresa localmente como

$$\nabla_\mu J^\mu = 0 \tag{55}$$

donde $J^\mu = (\rho, \mathbf{j}/c)$.

El caso de la energía es especial porque ya en relatividad especial la energía y el impulso se conectan en una única cantidad de naturaleza vectorial. Por lo tanto, su tetra corriente corresponde en realidad a un tensor dos veces contravariante $T^{\mu\nu}$, donde asociamos T^{00} con la densidad ordinaria de energía, T^{0i} con el flujo de energía dividido por c, T^{i0} con la densidad de impulso por c, y T^{ij} con el flujo de impulso. La ley de conservación de la energía-impulso se expresa como

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \tag{56}$$

1.7 Ecuaciones de Einstein

Como toda la teoría de la relatividad, las ecuaciones dinámicas están mapeadas sobre el ejemplo del electromagnetismo. Recordemos las ecuaciones de Maxwell relativistas

$$\begin{aligned} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\nu\rho,\sigma} &= 0 \\ g^{\nu\rho} \nabla_\rho F_{\mu\nu} &= 4\pi j_\mu \end{aligned} \tag{57}$$

donde $F_{\mu\nu}$ es el tensor de campos, $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ es el símbolo completamente antisimétrico, definido por $\epsilon^{0123} = \sqrt{-g}$, y j^μ la corriente eléctrica, que satisface la ley de conservación $\nabla_\mu j^\mu = 0$. El primer conjunto de ecuaciones son las ecuaciones de Maxwell homogéneas, que nos permiten introducir los potenciales $F_{\mu\nu} = A_{\mu,\nu} - A_{\nu,\mu}$. El segundo conjunto de ecuaciones dice que "hay que igualar la corriente de carga a una corriente construída a partir de los campos", con dicha corriente restringida por la necesidad de ser compatible con la conservación de la carga.

En el caso de la relatividad, por lo tanto, buscaremos ecuaciones del tipo

$$G^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\mu\nu} \tag{58}$$

donde la constante se escribe de esta manera estrambótica por razones históricas y $T^{\mu\nu}$ es el tensor de energía-impulso. El *tensor de Einstein* $G^{\mu\nu}$ está construído a partir de la métrica, y debe satisfacer las *identidades de Bianchi*

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} = 0 \tag{59}$$

Es obvio que el tensor de Riemann no sirve para este trabajo porque le sobran índices. A partir del tensor de Riemann podemos construir un tensor de segundo orden, el *tensor de Ricci*

$$R_{\rho\sigma} = R^\mu_{\rho\mu\sigma} \tag{60}$$

que tampoco sirve porque, en general, no cumple con las identidades de Bianchi. Sin embargo, hagamos el intento, lo cual se simplifica fuertemente si nos colocamos en un sistema localmente inercial, ya que entonces las derivadas covariantes se reducen a derivadas ordinarias. En un sistema localmente inercial, entonces

$$\begin{aligned}
g^{\nu\sigma}\nabla_\nu R_{\rho\sigma} &= g^{\nu\sigma} R^{\mu}_{\rho\mu\sigma,\nu} \\
&= \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[g^{\nu\sigma}\left(\Gamma^{\mu}_{\rho\sigma,\mu}-\Gamma^{\mu}_{\rho\mu,\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}\left(g_{\sigma\lambda,\rho\mu}-g_{\mu\lambda,\rho\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}\left(g_{\sigma\lambda,\nu\mu}-g_{\mu\lambda,\nu\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[g^{\nu\sigma}g^{\mu\lambda}\left(\Gamma^{\xi}_{\nu\sigma,\mu}g_{\xi\lambda}-\Gamma^{\xi}_{\nu\lambda,\sigma}g_{\xi\mu}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[g^{\nu\sigma}\left(\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\mu}-\Gamma^{\mu}_{\nu\mu,\sigma}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma}\right] \qquad (61)
\end{aligned}$$

Como el *escalar de curvatura*

$$R = g^{\nu\sigma}R_{\nu\sigma} \qquad (62)$$

es, precisamente, un escalar, la identidad

$$g^{\nu\sigma}\nabla_\nu R_{\rho\sigma} = \frac{1}{2}R_{,\rho} \qquad (63)$$

vale en cualquier sistema de coordenadas, y eso nos permite identificar

$$G^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R \qquad (64)$$

Una característica notable de las ecuaciones de Einstein es que el tensor de Einstein es simétrico, y por lo tanto también debe serlo el tensor de energía-impulso. Esto quiere decir que la densidad de momento lineal debe ser igual al flujo de energía dividido por c^2, y el flujo de impulso debe ser simétrico.

1.8 Las ecuaciones de Friedmann

Como manera de familiarizarnos con el análisis anterior, vamos a verificar que en el caso de un Universo de Robertson-Walker espacialmente plano recuperamos la *ecuación de Friedmann*

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\rho \qquad (65)$$

con $H = \dot{a}/a$, y la ecuación de conservación

$$\dot{\rho} + 3H\left(\rho + P\right) = 0 \qquad (66)$$

En este caso tenemos $g_{00} = -1$, $g_{0i} = 0$ y $g_{ij} = a^2(t)\,\delta_{ij}$. Los elementos no nulos de la conexión son

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{H}{c}\,g_{ij} \qquad (67)$$

y

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{H}{c}\,\delta^i_j \qquad (68)$$

Asumiendo que $T^{\mu\nu}$ depende sólo del tiempo, la ecuación de conservación es

$$0 = T^{0\mu}_{;\mu} = \frac{1}{c}\dot{T}^{00} + \Gamma^0_{ij}T^{ij} + \Gamma^i_{i0}T^{00} \tag{69}$$

(la ecuación $T^{i\mu}_{;\mu} = 0$ se satisface trivialmente) de modo que se deduce que $T^{00} = \rho$, $T^{0i} = 0$ y $T^{ij} = Pg^{ij}$, lo cual es consistente con el sentido físico de estas cantidades.

Las componentes no nulas del tensor de Riemann son

$$\begin{aligned} R^0_{i0j} &= \Gamma^0_{ij,0} - \Gamma^0_{jk}\Gamma^k_{i0} = \frac{1}{c^2}\left[\dot{H} + H^2\right] g_{ij} \\ R^i_{jkl} &= \Gamma^i_{k0}\Gamma^0_{jl} - \Gamma^i_{l0}\Gamma^0_{jk} = \frac{1}{c^2}H^2\left[\delta^i_k g_{jl} - \delta^i_l g_{jk}\right] \end{aligned} \tag{70}$$

Por lo tanto el tensor de Ricci es

$$\begin{aligned} R_{00} &= R^i_{0i0} = -\frac{1}{a^2}R^0_{i0i} = -\frac{3}{c^2}\left[\dot{H} + H^2\right] \\ R_{0i} &= 0 \\ R_{ij} &= R^0_{i0j} + R^k_{ikj} = \frac{1}{c^2}\left[\dot{H} + 3H^2\right] g_{ij} \end{aligned} \tag{71}$$

El escalar de curvatura

$$R = \frac{6}{c^2}\left[\dot{H} + 2H^2\right] \tag{72}$$

y el tensor de Einstein

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{3}{c^2}H^2 \\ G_{0i} &= 0 \\ G_{ij} &= = \frac{-1}{c^2}\left[2\dot{H} + 3H^2\right] g_{ij} \end{aligned} \tag{73}$$

La ecuación 00 de Einstein es directamente la ecuación de Friedmann, y la otra ecuación no trivial es

$$\dot{H} + \frac{3}{2}H^2 = -\frac{4\pi G}{c^2}P \tag{74}$$

que se deduce de la ecuación de Friedmann y la ley de conservación.

1.9 Ondas gravitatorias

Así como la predicción más notable de la teoría de Maxwell es la existencia de ondas electromagnéticas, la predicción más notable de la teoría de Einstein es la existencia de ondas gravitatorias, es decir, la posibilidad de que el tensor de Riemann no se anule aún en regiones del espacio tiempo donde no hay materia (y por lo tanto donde el tensor de Ricci sí se anula).

Para demostrar esta posibilidad vamos a considerar las pequeñas oscilaciones de la métrica alrededor de la métrica de Minkowski, es decir, vamos a escribir

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \tag{75}$$

y vamos a considerar las ecuaciones de Einstein en vacío

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{76}$$

(si el tensor de Ricci se anula, también lo hace la curvatura, y por lo tanto los tensores de Einstein y de Ricci coinciden) a primer orden en $h_{\mu\nu}$.

Nótese que junto con la perturbación de la métrica tenemos la libertad de hacer un cambio de coordenadas $x^\mu \to X^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$. En las nuevas coordenadas

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} - \xi^{\mu}_{\alpha}\eta_{\mu\beta} - \eta_{\alpha\nu}\xi^{\nu}_{,\beta} \tag{77}$$

o

$$\begin{aligned}
\bar{g}_{00} &= -1 + h_{00} + 2\xi^{0}_{,0} \\
\bar{g}_{0i} &= h_{0i} - \xi^{i}_{,0} + \xi^{0}_{,i} \\
\bar{g}_{ij} &= \delta_{ij} + h_{ij} + \xi^{i}_{,j} + \xi^{j}_{,i}
\end{aligned} \tag{78}$$

Está claro que eligiendo convenientemente el cambio de coordenadas, podemos imponer cuatro condiciones suplementarias sobre $h_{\mu\nu}$. Nosotros vamos a elegir $h_{0\mu} = 0$.

Con esta elección de coordenadas, las componentes no nulas de la conexión son

$$\begin{aligned}
\Gamma^{0}_{ij} &= \Gamma^{i}_{0j} = \frac{1}{2c}\dot{h}_{ij} \\
\Gamma^{i}_{jk} &= \frac{1}{2}\left(h_{ij,k} + h_{ik,j} - h_{jk,i}\right)
\end{aligned} \tag{79}$$

El tensor de Riemann $R^{\mu}_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\sigma}$. Las componentes no nulas son

$$\begin{aligned}
R^{0}_{i0j} &= \frac{1}{2c^2}\ddot{h}_{ij} \\
R^{0}_{ijk} &= \frac{1}{2c}\left(\dot{h}_{ik,j} - \dot{h}_{ij,k}\right) \\
R^{i}_{jkl} &= \frac{1}{2}\left(h_{il,jk} + h_{jk,il} - h_{jl,ik} - h_{ik,jl}\right)
\end{aligned} \tag{80}$$

El tensor de Ricci $R_{00} = -\ddot{h}/2c^2$, donde $h = h_{ii}$. Puesto que esto se debe anular, resulta $h = 0$. Entonces $R_{0i} = \dot{h}_{ij,j}/2c$, por lo que también se debe anular $h_{ij,j}$. Las ecuaciones no triviales son

$$0 = R_{ij} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{c^2}\ddot{h}_{ij} - \mathbf{\Delta} h_{ij}\right] \tag{81}$$

Estas ecuaciones admiten soluciones no triviales que son superposiciones de ondas planas

$$h_{ij} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i(\vec{p}\vec{x} - pct)} h_{\vec{p}ij} \tag{82}$$

donde $h_{\vec{p}ii} = h_{\vec{p}ij}p^j = 0$. Por lo tanto $h_{\vec{p}ij}$ sólo tiene dos componentes no triviales: si $\vec{p} = (p, 0, 0)$, entonces

$$h_{\vec{p}ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times \\ 0 & h_\times & -h_+ \end{pmatrix} \tag{83}$$

References

[1] L. Landau y E. Lifchitz, *Physique Théorique Tome 2: Théorie des champs* (Mir, Moscú, 1964).

[2] B. Schutz, *A first course in General Relativity* (Cambridge UP, Londres, 2009).

[3] Ch. Misner, K. Thorne and J. A. Wheeler, *Gravitation* (W. H. Freeman, San Francisco, 1970).