Ejercicios de Cosmologia (Primera Parte)

1. Demostrar que el Principio Cosmologico (PC, que el universo es homogeneo e isotropo) mas la invariancia Galileana implican la ley de Hubble (que la velocidad de expansion es proporcional a la distancia).

Sugerencia: considerar dos observadores "comoving" que ven una galaxy que tambien esta en una posicion comoving fija. Demandar adicion de velocidades mas el PC, e inferir que la relacion entre velocidad **v** y distancia **r** debe ser lineal. Luego demostrar usando argumentos de simetria que la relacion entre los dos vectores debe ser a traves de la matriz identidad, i.e. **v**= H **r**.

2. Demostrar que la distancia de luminosidad se puede escribir en el caso general ($k = 0, 1, -1$) de un universo homogeneo e isotropo como

$$d_L(z) = \frac{(1+z)}{H_0\sqrt{\Omega_k^{(0)}}} \sinh\Big(H_0\sqrt{\Omega_k^{(0)}} \int_0^z \frac{dz'}{H(z)}\Big), \tag{1}$$

donde $\Omega_k^{(0)} = -k/(a_0 H_0)^2$ es la contribucion presente de la curvatura espacial a la densidad critica.

3. Demostrar que el parametro de la ecuacion de estado de la energia oscura $w = p_{DE}/\rho_{DE}$ puede escribirse como

$$w(z) = \frac{(1+z)(2/3)HH' - H^2}{H^2 - \Omega_m^{(0)}(1+z)^3 H_0^2}, \tag{2}$$

asumiendo que la densidad de radiacion es despreciable y que el universo es espacialmente plano. H' denota $dH(z)/dz$.

4. Campos Estocasticos Gaussianos y Fluctuaciones de Vacio

a) Demostrar que para una densidad de probabilidad Gaussiana, $P_G(\phi) \equiv (2\pi\sigma^2)^{-1/2}\exp[-\phi^2/(2\sigma^2)]$, los momentos estan dados por $\langle\, \phi^{2n} \,\rangle = (2n-1)!!\,\langle\, \phi^2 \,\rangle^n$, donde $\langle\, \phi^2 \,\rangle = \sigma^2$ y $(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3)\ldots 1$.

b) Todos los moments pueden ser generados a partir de la *funcion generatriz de momentos* $M(\lambda) \equiv \langle\, \exp(\lambda\phi) \,\rangle$, i.e. $\langle\, \phi^n \,\rangle = (d^n M(\lambda)/d\lambda^n)_{\lambda=0}$. Usando el resultado en a), demostrar que para un campo Gaussiano $M(\lambda) = \exp[\lambda^2\sigma^2/2]$.

c) Demostrar que las fluctuaciones de vacio obedecen estadistica Gaussiana.
Sugerencia: Expandir cada modo de Fourier $\phi_{\mathbf{k}} = v_{\mathbf{k}}\, a_{\mathbf{k}} + w^*_{\mathbf{k}}\, a^\dagger_{-\mathbf{k}}$ en termino de los operadores de creacion y aniquilacion $a^\dagger_{\mathbf{k}}$ y $a_{\mathbf{k}}$, que obedecen las relaciones de conmutacion usuales y calcular la funcion generatriz de momentos para un dado modo. Dados dos operadores A y B que conmutan con su conmutador $[A, B]$, la siguiente propiedad puede ser util: $e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$.

5. El "problema del horizonte".

a) Demostrar que en el modelo de Big Bang estandar, la distancia al horizonte hoy esta muy bien aproximada por $d_H \approx 2H^{-1}$, a pesar de que el universo paso de estar dominado por la radiacion a estar dominado por la materia en tiempos distantes de hoy. Asumir que $\Omega_m^{(0)} = 0.3$ y que la temperatura de la radiacion de fondo hoy es de 2.7° K para fijar la densidad de energia de la materia y radiacion.

b) Ahora considerar la evolucion de d_H y H^{-1} cuando hay un periodo inflacionario. Asumir que el universo esta dominado por la radiacion antes y despues de inflacion, que dura 60 "e-folds". Demostrar que el horizonte y el radio de Hubble son muy diferentes hoy. Explicar por que el comportamiento de d_H soluciona el "problema del horizonte". Hacer un grafico de escalas, H^{-1}, y d_H en funcion del factor de escala.

c) Demostrar que una vez que cierta escala de distancia esta en contacto causal (determinada por d_H) *permanece por siempre* en contacto causal.

d) La explicacion en b) no es la explicacion usual que uno encuentra en libros de texto sobre inflacion, que solo involucra H^{-1} en vez de d_H. Por que es esto, y por que la explicacion "estandar" tiene sentido?

6. Asumiendo la aproximacion de "slow-roll", encontrar la forma mas general del potencial del inflaton de tal manera que las perturbaciones escalares sean exactamente invariantes de escala.

7. Fluctuaciones de Inflacion.

a) Considerar el modelo de inflacion caotica, donde el potencial esta dado por $V(\phi) = V_0\phi^p$, con $p \geq 2$. Calcular los parametros de "slow-roll" $\epsilon(\phi)$ y $\eta(\phi)$ en termino de los parametros del potencial y encontrar la amplitud del campo cuando inflacion termina (justificar la prescripcion usada) y 50 “e-folds” antes del final de inflacion.

b) Asumiendo que la amplitude de las fluctuaciones para modos que se vuelven mas grandes que H^{-1} 50 “e-folds” antes del final de inflacion es $\Delta(k) \sim 10^{-11}$, calcular la escala de energia de inflacion, el indice espectral escalar n_S y el indice espectral tensorial n_T. Que tan importante es la contribucion de los modos tensoriales comparado con los modos escalares para $p = 4$?

8. La evolucion lineal del espectro de potencias de la materia oscura $P(k, \tau)$ luego del desacople entre bariones y fotones (DEC) esta dado por

$$P(k, \tau) = [D(\tau)]^2 \ [T(k)]^2 \ P_p(k), \tag{3}$$

donde $D(\tau)$ es el factor de crecimiento lineal [i.e. $D(\tau_{dec}) \equiv 1$], $T(k)$ es la funcion de transferencia y $P_p(k)$ es el espectro de potencias primordial, e.g. $P_p(k) = (4/25)(k/\mathcal{H})^4 P_\zeta(k)$ donde $P_\zeta(k) \sim k^{n_s-4}$ es el espectro de potencias escalar generado por inflacion, con n_s el indice espectral escalar ($n_s = 1$ corresponde a invariancia de escala).

a) De la ecuacion (3) resulta que el valor actual del indice espectral, $n(k) = d \ln P(k)/d \ln k$, depende de la fisica de inflacion y del contenido de materia oscura y radiacion. A una dada escala fija k, el indice espectral $n(k)$ aumenta o disminuye cuando,

   i) Se aumenta la curvatura del potencial inflacionario
   ii) Se aumenta la densidad de materia oscura
   iii) Se aumenta la densidad de radiacion.

   En cada caso, explicar la razon fisica por la cual el indice espectral cambia.

b) Aunque ambos cambian el indice espectral, los efectos inflacionarios en el espectro de potencias son un tanto distintos que los efectos debido al contenido energetico (materia o radiacion). Explicar especificamente cual es esta diferencia (asumir que la normalizacion del espectro esta fijada por las observaciones).

9. En Relatividad General, la evolucion lineal de las fluctuaciones de densidad en materia oscura en la era dominada por la materia esta dada por el *factor de crecimiento* $D(\tau)$ que obedece la ecuacion,

$$\frac{d^2D}{d\tau^2} + \mathcal{H}\frac{dD}{d\tau} = \frac{3}{2}\Omega_m\ \mathcal{H}^2 D, \tag{4}$$

donde $\mathcal{H}(\tau)$ es la constante de Hubble conforme $\mathcal{H} \equiv d\ln a/d\tau$ ($\mathcal{H} = Ha$), τ el tiempo conforme, y $\Omega_m(\tau)$ es la densidad de materia en unidades de la densidad critica.

a) Escribir la ecuacion de Friedmann en terminos de $\mathcal{H}$, Ω_m, y $\mathcal{H}'$, donde $'$ denota $d/d\tau$.

b) Recordar que en teoria lineal de perturbaciones, para modos que crecen, la divergencia de la velocidad $\theta = \nabla \cdot \mathbf{v}$ esta relacionada con las fluctuaciones de densidad δ, segun $\theta = -\mathcal{H}f\delta$, donde $f \equiv d\ln D/d\ln a$. Usar (4) para encontrar una ecuacion diferencial para f *en funcion de* Ω_m (i.e. cambiar a Ω_m como variable temporal), y demostrar que es

$$\Omega_m(\Omega_m - 1)\frac{df}{d\Omega_m} + f^2 + f(1 - \Omega_m/2) = \frac{3}{2}\Omega_m, \tag{5}$$

c) Expandiendo alrededor de $\Omega_m = 1$, demostrar que $f(\Omega_m) = \Omega_m^p$ es una solucion, y encontrar el valor de p. Comparar esto con el valor que se suele usar frecuentemente $f \sim \Omega_m^{0.6}$.

10. El modelo del colapso esferico en un universo con $\Omega_m = 1$ sigue la ecuacion de movimiento

$$\ddot{r} = -\frac{GM(<r)}{r^2} \tag{6}$$

donde $M(<r)$ es la masa interior al radio r, que se asume estar distribuida en capas esfericas. Asumir que las capas no se cruzan, por lo tanto, que M es una constante de movimiento.

a) Demostrar que esta ecuacion admite una solucion parametrica (para velocidad inicial nula)

$$r = A(1 - \cos\theta), \qquad t = B(\theta - \sin\theta), \qquad A^3 = GMB^2 \tag{7}$$

b) A partir de la definicion de la densidad interior al radio r, calcular la *fluctuacion* de densidad δ y demostrar que

$$\delta = \frac{9}{2}\frac{(\theta - \sin\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^3} - 1 \tag{8}$$

c) Tomando el limite de tiempos pequeños, identificar la fluctuacion de densidad inicial y demostrar que las fluctuaciones lineales evolucionan siguiendo,

$$\delta_{\rm lin} = \frac{3}{5}[3/4(\theta - \sin\theta)]^{2/3} \tag{9}$$

d) Usar la solucion parametrica a segundo orden en teoria de perturbaciones para demostrar que se recupera el vertice de segundo orden $\nu_2 = 34/21$ que obtuvimos en clase a partir de las relaciones de recurrencia.