Temas ⟨avanzados⟩ de Mecánica Cuántica

DF-FCEN-UBA, Segundo Cuatrimestre 2018

Guía 1: Operadores creación y aniquilación, Modelo de Hubbard

1 Operadores creación y aniquilación

1. Hallar las reglas de anticonmutación (conmutación) que satisfacen los operadores de creación y aniquilación de fermiones (bosones).

2. Demostrar que para operadores fermiónicos se satisface:

$$[a_i^\dagger a_j, a_k^\dagger a_l] = \delta_{jk} a_i^\dagger a_l - \delta_{il} a_k^\dagger a_j \tag{1}$$

   Calcular el mismo conmutador para bosones.

3. Trabajar el conmutador:

$$[a_1^\dagger a_2, a_3^\dagger a_4^\dagger a_5 a_6] \tag{2}$$

   para fermiones y bosones, hasta reducirlo a la suma de productos de cuatro operadores (ver ecuación (10.18) del libro de Huag y Koch).

2 Modelo de Hubbard

El Hamiltoniano de un modelo de Hubbard para fermiones en un lattice unidimensional de L sitios se escribe,

$$\begin{aligned}
\hat{H} &:= \hat{T} + \hat{U} + \hat{V} && (3)\\
\hat{T} &:= -t \sum_{l=1}^{L-1} \sum_{\sigma=\uparrow,\downarrow} (c_{l,\sigma}^\dagger c_{l+1,\sigma} + \text{H.c.}) && (4)\\
\hat{U} &:= U \sum_{l=1}^{L} \left(\hat{n}_{l,\uparrow} \hat{n}_{l,\downarrow} \right) && (5)\\
\hat{V} &:= \sum_{l=1}^{L} (v_l^{\text{ext}} - \mu) \hat{n}_l \qquad , && (6)
\end{aligned}$$

donde $c_{l,\sigma}^{\dagger}$ crea y $c_{l,\sigma}$ destruye un fermión de espín $\sigma = \uparrow, \downarrow$ en el sitio l. $\hat{T}$ es el operador cinético o de hopping que describe saltos entre sitios (el parámetro t está relacionado con el solapamiento de las funciones de la base) y $\hat{U}$ describe una interacción local (sólo hay interacción entre partículas si están en el mismo sitio). El potencial $\hat{V}$ describe la acción de un potencial local y μ es el potencial químico que fija el número de partículas (se puede pensar como un multiplicador de Lagrange que voy variando con el fin de encontrar el estado fundamental de sistemas con distinto número N de partículas).
Escribir:

1. Las reglas de conmutación de los operadores $c_{l,\sigma}^{\dagger}$ y $c_{l,\sigma}$. El operador número de ocupación $\hat{n}_l$ y el número total de partículas N en función de los operadores creación y aniquilación.

2. *N fermiones, lattice de 2 sitios*
   Para el caso particular de $L = 2$ qué dimensión tiene el espacio de Fock? Escriba todos los estados del espacio de Fock para todos los posibles N y la dimensión del espacio de Hilbert para cada N. Por ejemplo para $N = 4$ el espacio de Hilbert tiene dimensión 1, el único estado posible es $|\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\rangle$.

3. *2 fermiones, lattice de 2 sitios*
   Para el caso particular $L = N = 2$ escribir los 3 estados de la base singlete en términos de $c_{l,\sigma}^{\dagger}$ y $c_{l,\sigma}$. Escribir el valor esperado de los operadores número de ocupación de los sitios 1 y 2: $< \hat{n}_1 >$ y $< \hat{n}_2 >$ en cada uno de los estado de la base.

   (a) Reescribir el potencial $\hat{V}$ en función de $(\hat{n}_1 - \hat{n}_2)$ y $(\hat{n}_1 + \hat{n}_2)$. Demostrar que al fijar $L = N = 2$ la única variable independiente es $< \hat{n}_1 - \hat{n}_2 >$. De hecho podemos interpretar $< \hat{n}_1 - \hat{n}_2 >$ como el dipolo. Cómo se escribiriá un operador correspondiente a un campo oscilante en approximación dipolar?

   (b) Escribir un estado general $|\Psi\rangle$ y calcular $d(t) =< \hat{n}_1 - \hat{n}_2 > (t)$.

   (c) Argumentar bajo qué condiciones el sistema se comporta como un sistema efectivo de 2 niveles bajo la acción de un campo oscilante en approximación dipolar . Hallar la frequencia de Rabi.

4. *Bosones*

Escribir el Hamiltoniano ahora para bosones (modelo de Bose-Hubbard) (se usa como modelo de gases alcalinos diluídos en redes ópticas).

(a) Qué dimensión tiene el espacio de Fock para $L = 2$?

(b) Para el caso de $L = N = 2$ escribir un estado $|\Psi\rangle$ general. Hallar los valores esperados de $< \hat{n}_1 >$ y $< \hat{n}_2 >$ en cada uno de los estado de la base.

(c) Escribir la energía del estado fundamental en ausencia de potencial externo y en el límite $t \to 0$.