Temas $\langle$avanzados$\rangle$ de Mecánica Cuántica

DF-FCEN-UBA, Segundo Cuatrimestre 2018

Guía 5: Sistema de dos niveles en una cavidad: modelo de Jaynes-Cummings

1. Modelo de Jaynes-Cummings en la aproximación de onda rotante

El modelo de Jaynes-Cummings encuentra aplicación, entre otras cosas, para describir la interacción de un átomo con el campo electromagnético cuantizado en una cavidad. El átomo se modela simplemente como un sistema efectivo de dos niveles (miramos una única transición atómica), $\{|a\rangle, |b\rangle\}$ (el estado fundamental y el excitado, respectivamente), de forma tal que el Hamiltoniano atómico puede escribirse como

$$H_{\text{at}} = \hbar\omega_0 \, |b\rangle\langle b| \, , \tag{1}$$

donde ω_0 es la frecuencia de la transición atómica seleccionada.

Por otro lado, para el campo electromagnético, si consideramos que un único modo, de frecuencia ω, interactúa con la transición atómica, entonces el Hamiltoniano libre del campo será

$$H_{\text{em}} = \hbar\omega a^\dagger a \, . \tag{2}$$

Finalmente, en la aproximación dipolar la interacción entre el átomo y el campo se puede escribir como

$$H_{\text{int}} = \frac{\hbar\Omega}{2} \left(\sigma_+ + \sigma_-\right) \otimes \left(a^\dagger + a\right) \, , \tag{3}$$

donde $\sigma_+ = |b\rangle\langle a|$ y $\sigma_- = |a\rangle\langle b|$.

Finalmente, el Hamiltoniano total es

$$H = H_{\text{at}} + H_{\text{em}} + H_{\text{int}} \tag{4}$$

El objetivo de este ejercicio es realizar la aproximación de onda rotante para obtener un Hamiltoniano que se pueda diagonalizar analíticamente.

a) Para ello, en primer lugar escriba el Hamiltoniano H en la representación de interacción usando el Hamiltoniano libre $H_0 = H_{\text{at}} + H_{\text{em}}$. En particular, muestre que de los cuatro términos del Hamiltoniano de interacción H_{int}, dos de ellos oscilan con una frecuencia $\omega_0 + \omega$, mientras que los otros dos oscilan con frecuencia $|\omega_0 - \omega|$.

b) Considerando que estamos en una situación cerca de la resonancia, realice la aproximación de onda rotante (RWA). Reescriba el Hamiltoniano aproximado en la representación de Schrödinger. ¿En qué difiere el Hamiltoniano de RWA respecto del Hamiltoniano original?

c) Definimos el operador "número de excitaciones" $N = |b\rangle\langle b| + a^\dagger a$. Muestre que N se conserva para el caso RWA, es decir que $[N, H] = 0$ (¿es esto cierto también para el caso del Hamiltoniano exacto?). ¿Cuál es una base posible de autoestados de N? ¿Está degenerado N? Escriba H (para el caso RWA) en la base de N.

2. Sistema de dos niveles en una cavidad más allá de la aproximación de Jaynes-Cummings

Escriba la matriz del Hamiltoniano completo en bases $\{|i, n\rangle, i = a, b, n = 0, 1, ...\}$ de distinto número de estados (por ejemplo, tomar 6 y luego 8 estados) y reordene la base de estados de modo que la matriz quede separada en bloques. ¿Qué implica esta separación en bloques para la dinámica del sistema completo?

3. Emisión espontánea con detuning

Considere el caso en que la cavidad no está exactamente en resonancia con el átomo. Deduzca la Ec. (6B.21) del libro de Grynberg *et al.* para la población del estado $|b\rangle$ del átomo en función del tiempo.

4. Evolución en presencia de un campo en la cavidad

Considere un átomo de dos niveles que está inicialmente en el estado excitado $|b\rangle$ y que empieza a interactuar resonantemente (i.e. detuning es cero, $\delta = 0$) con un modo de la cavidad en el estado inicial $|\phi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} c_n |n\rangle$. El estado inicial del sistema (átomo + campo) es entonces el estado producto $|\Psi(t = 0)\rangle = |b\rangle \otimes |\phi\rangle$.

a) ¿Cuál es el estado del sistema $|\Psi(t)\rangle$ a tiempo t? Hint: use los autoestados con interacción de los dobletes obtenidos en la rotating-wave approximation (RWA).

b) Ahora suponga que el estado inicial del campo es coherente:

$$|\phi\rangle = |\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{5}$$

con $\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle$ (estado cuasi-clásico). ¿Cuál es la probabilidad $P(|b\rangle, t)$ de encontrar el átomo en el estado excitado después de un tiempo de interacción t? ¿Para el caso de α grande podríamos decir que la evolución es análoga a la de un campo clásico? ¿Sería posible calcular el número n de fotones midiendo $P(|b\rangle, t)$?