Guia 1 Dinámica no Lineal - Flujos unidmensionales- Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2019

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios el resto son optativos, pero recomendados.

1. Analice las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden gráficamente. Primero grafique el campo vector. Luego encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de la trayectoria ($x(t)$) para distintas condiciones iniciales. Grafique alguna de estas trayectorias en el espacio de fases (i.e. el retrato de fases). Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada. Compruebe que las soluciones posibles para estos sistemas son de forma similar: o se aproximan a un valor o se alejan del mismo.
   (a) $\dot{x} = ax$ (sistema lineal en 1D, note el conjunto de soluciones acotada que presenta este sistema)
   (b) (*) $\dot{x} = 4x^2 - 16$
   (c) (*) $\dot{x} = x - x^3$
   (d) $\dot{x} = 1 + 0.5 \cos x$
   (e) (*) $\dot{x} = e^x - \cos x$ (truco: grafique e^x y $\cos x$ en el mismo gráfico y busque las intersecciones. No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)
   (f) $\dot{x} = 1 - 2\cos x$

2. Encuentre una ecuación $\dot{x} = f(x)$ cuya solución es consistente con el gráfico siguiente:

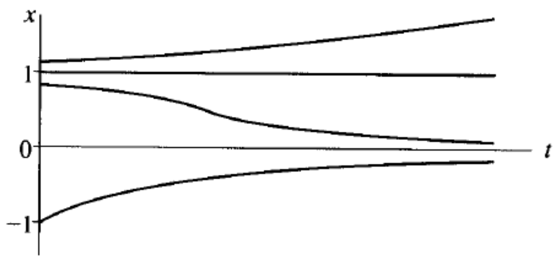

Figure 1: Problema 2

3. (*) El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros. Interprete a y b biológicamente. Dibuje el campo vector y luego grafique $N(t)$ para varias condiciones iniciales.

4. Use estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si la estabilidad lineal falla porque $f'(x^*) = 0$, use un argumento gráfico para demostrar estabilidad.
   (a) $\dot{x} = x(1 - x)$

(b) $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$

(c) (*) $\dot{x} = \tan x$

(d) (*) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

(e) $\dot{x} = ax - x^3$, donde a puede ser positivo, cero, o negativo. Discuta todos los casos.

(f) $\dot{x} = x^2(6-x)$

(g) (*) $\dot{x} = \ln x$

5. (*)Usando estabilidad lineal, clasifique todos los puntos fijos del modelo de Gompertz de crecimiento de tumores visto anteriormente.

6. (*) Considere la ecuación $\dot{x} = rx + x^3$, para $r > 0$ fijo. Muestre que $x(t) \to \infty$, comenzando con cualquier condición inicial x_0

7. (*) Muestre que el problema de valores iniciales $\dot{x} = x^{1/3}$, $x(0) = 0$, tiene más de una solución. [ayuda: construya una solución que se quede en $x = 0$ hasta un t_0 arbitrario que comienza despegarse].

---

8. Para los siguientes problemas dibuje los retratos de fase como función del parámetro de control μ. Clasifique las bifurcaciones que ocurren a medida que μ varía y encuentre todas los valores μ de las bifurcaciones.

   (a) (*) $\dot{\theta} = \mu \sin\theta - \sin 2\theta$

   (b) (*) $\dot{\theta} = \mu + \cos\theta + \cos 2\theta$

   (c) $\dot{\theta} = \mu + \sin\theta + \cos 2\theta$

   (d) $\dot{\theta} = \frac{\sin\theta}{\mu + \cos\theta}$

9. (*) Suponga que agrega un resorte de torsión al péndulo sobreamortiguado, modificando la ecuación de movimiento a, $b\dot{\theta} + mgL\sin\theta = \Gamma - k\theta$.

   (a) Esta ecuación da un campo vector bien definido?

   (b) Adimensionalice la ecuación.

   (c) Qué hace el péndulo en asintóticamente en el tiempo.

   (d) Muestre que ocurren muchas bifurcaciones a medida que k varía de 0 a ∞. Qué bifurcaciones son?

10. (*)Luciérnagas. Considere el modelo alternativo, $\dot{\Theta} = \Omega, \dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$, donde f es una onda triangular,

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases} \tag{1}$$

en el intervalo $-\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$, y extienda peri'odicamente f fuera de este intervalo.

   (a) Grafique $f(\phi)$.

   (b) Encuentre el rango de dinámica acotada.

   (c) Asuma que las luciérnagas están lockeadas al estímulo, encuentre una fórmula para la diferencia de fase ϕ^*.

   (d) Encuentre una fórmula para T_{drift}.

11. (*) Sistema excitable. Suponga que estimula una neurona inyectándole un pulso de corriente. Si el estímulo es pequeño, el potencial de membrana aumenta un poco y luego relaja a su estado de reposo. Sin embargo si el est'imulo supera un umbral la neurona 'dispara' y produce un potencial de membrana grande y luego vuelve al potencial de reposo. Sorprendentemente el tamaño del pico del potencial no depende del estímulo, y cualquier cosa por encima del umbral da lo mismo. Estos sistemas se los conoce como *excitables*, donde i) tiene un atractor único, y ii) para un estímulo suficientemente grande, el sistema realiza una excursión en el espacio de fases grande antes de volver a su estado de reposo.

Analice el sistema excitable más sencillo $\dot{\theta} = \mu + \sin\theta$ para μ levemente menor a 1.

(a) Muestre que este sistema satisface las dos condiciones de sistema excitable.

(b) Sea el potencial de membrana $V(t) = \cos\theta(t)$. Haga un gráfico de $V(t)$ para varias condiciones iniciales.