Guia 2 Dinámica No Lineal - Bifurcaciones en la línea- Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2019

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios el resto son optativos, pero recomendados.

1. **Bifurcación saddle-node**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación saddle-node ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.

   (a) (*) $\dot{x} = 1 + rx + x^2$

   (b) (*) $\dot{x} = r - \cosh x$

   (c) $\dot{x} = r + x - \ln(1 + x)$

   (d) $\dot{x} = r + x/2 - x/(1 + x)$

   Cuando se discute la forma normal de la saddle-node se utiliza la suposición que $a = \frac{\partial f}{\partial r}|_{x^* r_c} \neq 0$. Para ver lo que sucede si no se cumple dicha condición haga un dibujo del campo vector de los siguientes ejemplos:

   (a) $\dot{x} = r^2 - x^2$

   (b) $\dot{x} = r^2 + x^2$

2. **Bifurcación transcrítica**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación transcrítica ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.

   (a) (*) $\dot{x} = rx + x^2$

   (b) (*) $\dot{x} = rx - \ln(1 + x)$

   (c) $\dot{x} = x - rx(1 - x)$

   (d) $\dot{x} = x(r - e^x)$

3. **Bifurcación pitchfork**: para los siguientes ejercicios, dibuje los campos vectores que cambian cualitativamente al cambiar r. Muestre que una bifurcación pitchfork ocurre para un valor de r a determinar. Finalmente, dibuje el diagrama de bifurcaciones del punto fijo x^* como función de r.

   (a) (*) $\dot{x} = rx + 4x^3$

   (b) (*) $\dot{x} = rx - \sinh x$

   (c) $\dot{x} = rx - 4x^3$

   (d) $\dot{x} = x + \frac{rx}{1+x^2}$

4. Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga que tipo es (incluyendo si corresponde a si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.

   (a) (*) $\dot{x} = r - 3x^2$

   (b) (*) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$

(c) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$

(d) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$

(e) $\dot{x} = x + \tanh(rx)$

(f) $\dot{x} = rx + \frac{x^3}{1+x^2}$

5. (*) **Pitchfork imperfecta** Considere el sistema $\dot{x} = rx + ax^2 - x^3$, donde $-\infty < a < \infty$. Para $a = 0$ tenemos la forma normal de pitchfork supercrítica. Ahora queremos ver el efecto de perturbar el sistema con un término cuadrático.

   (a) ¿Qué simetría se rompe para $a \neq 0$?

   (b) Para cada a realice un diagrama de bifurcaciones x^* vs r. A medida que a varia ocurren cambios cualitativos. Encuentre todos los cambios cualitativos que se pueden obtener cambiando a.

   (c) Resuma los resultados anteriores dibujando en un diagrama (r, a) los distintos retratos de fases. Bifurcaciones ocurren en las interfases de estas regiones. Identifiquelas.

6. (*) **Singular perturbation** Considere la siguiente ecuación lineal

$$\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 0 \tag{1}$$

   sujeto a la condición $x(0) = 1, \dot{x}(0) = 0$.

   (a) Resuelva el problema para todo $\epsilon > 0$.

   (b) Suponga que $\epsilon \ll 1$. Muestre que hay dos escalas temporales muy separadas en el problema, y estímelas en términos de ϵ.

   (c) Grafique la solución $x(t)$ para $\epsilon \ll 1$, y indique las dos escalas de tiempo en el gráfico.

   (d) Que concluye con la validación de reemplazar $\epsilon \ddot{x} + \dot{x} + x = 0$ con su limite singular $\dot{x} + x = 0$

   (e) De dos análogos físicos de este problema (uno de circuitos eléctricos y otro mecánico).En cada caso encuentre el parámetro adimensional ϵ y explique el significado físico del limite $\epsilon \ll 1$.

7. (*) **Reducción de parámetros en la pitchfork subcritica** El sistema de primer orden $\dot{u} = au + bu^3 - cu^5$ donde $b, c > 0$ son parametros, tiene una bifurcación pitchfork subcritica en $a = 0$. Muestre qu la ecuación puede reducirse los parámetros a

$$\frac{dx}{d\tau} = rx + x^3 - x^5 \tag{2}$$

   donde $x = u/U$, $\tau = t/T$ y U, T y r tienen que ser determinados a partir de $a, b,$ y c.

8. (*) **Switch bioquímico** Las bandas de las cebras y los patrones de las mariposas con dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el surgimiento de dichos patrones es un problema abierto en la biología.

   Como uno de los ingredientes necesarios para el surgimiento de dichos patrones, Lewis (1979) consideró un ejemplo sencillo de switch bioquímico, donde un gen G se activa por una señal bioquímica S. Por ejemplo, el gen está normalmente desactivado, pero se puede 'prender' para producir un pigmento, u otro producto de los genes cuando la concentración de S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2} \tag{3}$$

   donde $k_j > 0$ son constantes de reacción. La producción de g es estimulada por s_0 al ritmo k_1, y por una retroalimentación *autocatalitica* o positiva (los términos nolineales). Hay también un término de degradación controlado por k_2.

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \tag{4}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

(c) Asuma que inicialmente no hay ningun producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activante se 'prende'); qué pasa con $g(t)$? Qué pasa si s vuelve a caer a cero? El producto se 'apaga' nuevamente?

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

(hint: vea el Murray (1989) capitulo 15).

9. **Epidemias** En un trabajo pionero Kermack y McKendrick (1927) propusieron un modelo sencillo para la evolución de las epidemias. Suponga que la población puede dividirse en 3 tipos: $x(t)$ =número de individuos sanos; $y(t)$ =número de individuos infectados; $z(t)$ =número de individuos muertos. Asuma que el total de la población permanece constante, excepto por las muertes de la epidemia. El modelo

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly \end{aligned} \tag{5}$$

donde k y l son constantes positivas. El modelo se basa en

- Los individuos sanos se enferman a un ritmo proporcional al producto de x e y,
- Los enfermos mueren a una tasa l.

El objetivo del ejercicio es reducir este sistema de tercer orden a uno de primer.

(a) Muestre que $x + y + z = N$, donde N es constante.

(b) Use las ecuaciones de $\dot{x}$ y $\dot{z}$ para mostrar que $x(t) = x_0 \exp(-kz(t))/l$, donde $x_0 = x(0)$.

(c) Muestre que z satisface la ecuación de primer orden $\dot{z} = l(N - z - x_0 \exp(-kz/l))$.

(d) que la ecuación anterior se puede adimensionalizar a

$$\frac{du}{d\tau} = a - bu - e^{-u} \tag{6}$$

(e) Muestre Muestre que $a \geq 1$ y $b > 0$.

(f) Determine el número de puntos fijos y clasifíquelos.

(g) Muestre que el máximo de $\dot{u}(t)$ ocurre justo en el mismo momento que el máximo de $\dot{z}(t)$ y $y(t)$. Este tiempo se conoce como el *pico de la epidemia*, y denotado t_{pico}.

(h) Muestre que si $b < 1$ entonces $\dot{u}(t)$ está aumentando en $t = 0$ y llega a un máximo en t_{pico}. Muestre que $\dot{u}(t)$ eventualmente tiende a cero.

(i) En cambio si $b > 1$, $t_{pico} = 0$, y no ocurre la epidemia.

(j) Esta condición se conoce como el umbral de la epidemia. Puede obtener una interpretación biológica de la misma?

(k) Kermack y McKendrick mostraron que su modelo daba un buen ajuste a los datos de la plaga de Bombay 1906. Como lo mejoraría para hacerlo más apropiado para el SIDA? Que suposiciones revisaría?

(hint: ver Murray (1989) capítulo 19).