Guia 7 Dinámica No Lineal - Mapas- Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2019

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios el resto son optativos, pero recomendados.

1. ***Construcción de un Mapa de Poincaré:** Considere la siguiente ecuación diferencial de un oscilador forzado periódicamente con disipación $\delta > 0$:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \omega_0^2 x = cos(\omega t)$$

   (a) Encuentre la solución general del sistema homogéneo teniendo en cuenta los valores posibles de $\delta^2 - 4\omega_0^2$. ¿A qué tiende la solución $x_{hom}(t)$ con t tendiendo a innito?

   (b) Halle la solución particular $xp(t) = Acos(\omega t) + Bcos(\omega t)$. Escriba la solución general $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ para el caso $\delta^2 - 4\omega_0^2 \leq 0$ y obtenga los valores de las constantes de su expresión a partir de las condiciones iniciales $(x0, y0)$ en $t = 0$.

   (c) Reescriba la ecuación del oscilador como un sistema de ecuaciones y conviértala en un sistema autónomo deniendo la variable $\dot{\theta} = \omega$.

   (d) Dena la sección Σ de Poincaré correspondiente a la condición $\theta = 0 \in S1$. Encuentre el tiempo T que transcurre entre cada intersección del flujo con Σ. Escriba a partir de la solución en b) con las condiciones iniciales el mapa $P : \Sigma \to \Sigma$.

   (e) Compruebe que $(x, y) = (A, \omega B)$ es un punto jo del mapa. Encuentre los autovalores de su parte lineal. ¿Es este punto asintóticamente estable? Dibuje la trayectoria de los puntos en el plano (x, y).

   (f) ¿Qué ocurre cuando hay resonancia $\omega = (1/2)\sqrt{4\omega_0^2 - \delta^2}$?

   (g) Para el caso $\delta = 0$ resuelva el sistema nuevamente y graque la solución en el toro extendido. Estudie los casos i) $\omega = m\omega_0$ ii) $n\omega = \omega_0$, con $m, n > 1 \in N$

2. Mapas lineales. Analice los siguientes mapas. Compute las órbitas e ilústrelas en el espacio de fases. Describa la variedad estable, inestable y central en el origen.

$$\begin{aligned} i) \quad x &\to \lambda x, \qquad |\lambda| < 1, |\lambda| < 1 \\ y &\to \mu y, \qquad |\mu| > 1, |\mu| < 1 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} *ii) \quad x &\to x - \omega y, \qquad \omega > 1 \\ y &\to \omega x + \omega y \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} iii) \quad x &\to x, \qquad |\lambda| < 1 \\ y &\to \lambda y \end{aligned} \tag{3}$$

3. Mapas no lineales.

   (a) Considere el siguiente mapa unidimensional cuadrático:

$$x_{n+1} = x_n^2 + c$$

   Encuentre y clasifique los puntos fijos en función de c. Encuentre los valores de c para los cuales el punto fijo se bifurca y clasifique dichas bifurcaciones. Para qué valores de c hay un periodo 2 estable. Grafique un diagrama de bifurcación del mapa, indique el la orbita de periodo dos y su estabilidad

(b) Analice el siguientes mapa bi dimensional. Encuentre sus puntos fijos y discuta su estabilidad en su aproximación lineal. Encuentre a partir de los autovectores las variedades estables e inestable dibujando retratos de fases. Se pueden encontrar órbitas periódicas de orden superior?

$$\begin{aligned} x &\rightarrow (1-x)x + by, \qquad b > -1/16 \\ y &\rightarrow y/2 + x \end{aligned} \tag{4}$$

4. Mapa logístico. Encuentre los puntos fijos y algunos puntos de periódo bajo en el mapa $x \rightarrow \mu x(1-x)$, con $mu \in [0,4]$. Diga que ecuación debe cumplir μ para que existan órbitas de periodo 2. Puede encontrar valores de bifurcación en los que aparecen nuevas órbitas periódicas?

5. Mapa de Henon.

   (a) Encuentre los puntos fijos de periodo uno y de perido dos para el siguiente mapa de henon:

   $\mathrm{x}_{n+1} = 3/50 - x_n^2 + 9/10 y_n; \qquad y_{n+1} = x_n$

   (b) Muestre que este mapa dado por:

   $$x_{n+1} = 1 - \alpha x_n^2 + y_n; \qquad y_{n+1} = \beta x_n$$

   tiene una bifurcación de periodo 1 a periodo 2 en $\alpha = 3(\beta-1)^2/4$. Estudie el diagrama de bifurcaciones del mapa graficando x_n como función de α cuando $\beta = 0.4$.

   (c) Numéricamente aplique el mapa del item anterior con $\alpha = 1.2$ y $\beta = 0.4$ e itere dos veces consecutivas el mapa. Qué es lo que le pasa al cuadrado? Relaciónelo con el ejercicio siguiente.

6. Mapa de la herradura (Mapa de Smale) Trabajando en la aproximación al conjunto invariante aplicando tres veces el mapa

   $$f^{-3}(s) \cap f^{-2}(s) \cap f^{-1}(s) \cap s \cap f^{1}(s) \cap f^{2}(s) \cap f^{3}(s)$$

   donde $f(s)$ es:

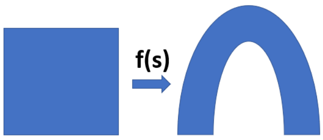

Figure 1: Mapa de smale

   (a) Nombre todos los sectores en la aproximación, ayúdese con la figura

   (b) Ubique en qué casilleros caen:

      i. $[001, 100, 010]$
      ii. $[01, 10]$
      iii. $[011, 101, 110]$
      iv. $[1]$ y $[0]$

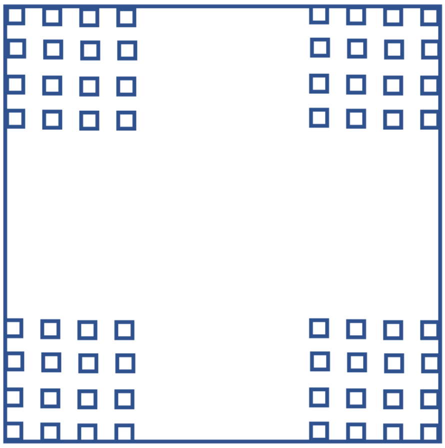

Figure 2: Mapa de smale aproximación al conjunto invariante aplicando tres veces el mapa