DNL/MCA 2020
Práctica 17/04/2020

Orador hoy: Santiago Boari

Un poco de vocabulario (I)

- *Sistema dinámico:* conjunto de reglas que prescriben la evolución temporal de un problema (para nosotros serán Ecuaciones Diferenciales Ordinarias u ODEs)
- La *dimensionalidad* del sistema viene dada por la *cantidad* de ecuaciones que rijan la dinámica del problema.
- Nos concentraremos principalmente en *sistemas autónomos* $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ (no dependen explícitamente del tiempo)
- $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ es lo que llamamos un *campo vector*.
- Una *trayectoria* es una solución del tipo $\boldsymbol{x}(t)$ ($\boldsymbol{\theta}(t)$ en el caso del flujo en el círculo).

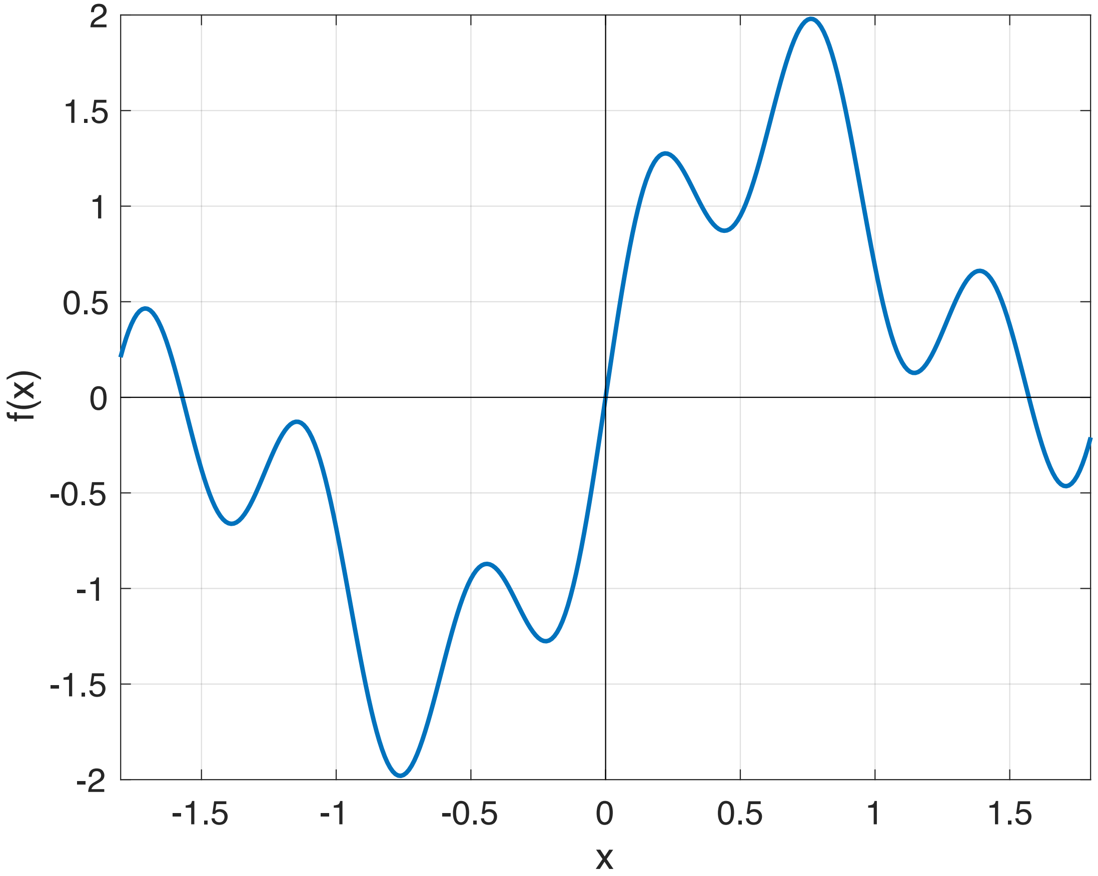
Un poco de vocabulario (II)

- *Espacio de fases:* es el espacio constituido por las variables dinámicas que describen el sistema. Tiene, por lo tanto, la misma *dimensionalidad* que el sistema dinámico en cuestión .
- *Retratos de fase*: una manera de representar varias trayectorias representativas de los distintos comportamientos encontrados en el espacio de fases para un sistema dado (y con un cierto conjunto de parámetros, como veremos más adelante).
- *Punto fijo* ($\boldsymbol{x}^*$): en el cual $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{0}$.
- Si la condición inicial es $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^*$, la única evolución temporal posible sería *permanecer en ese punto fijo* $\forall t > 0$.

Análisis de sistemas autónomos en 1D

- En la materia, desarrollaremos (entre otras cosas) formas de analizar el comportamiento de trayectorias *sin resolver las ecuaciones*. Es decir, sin llegar a una solución analítica.

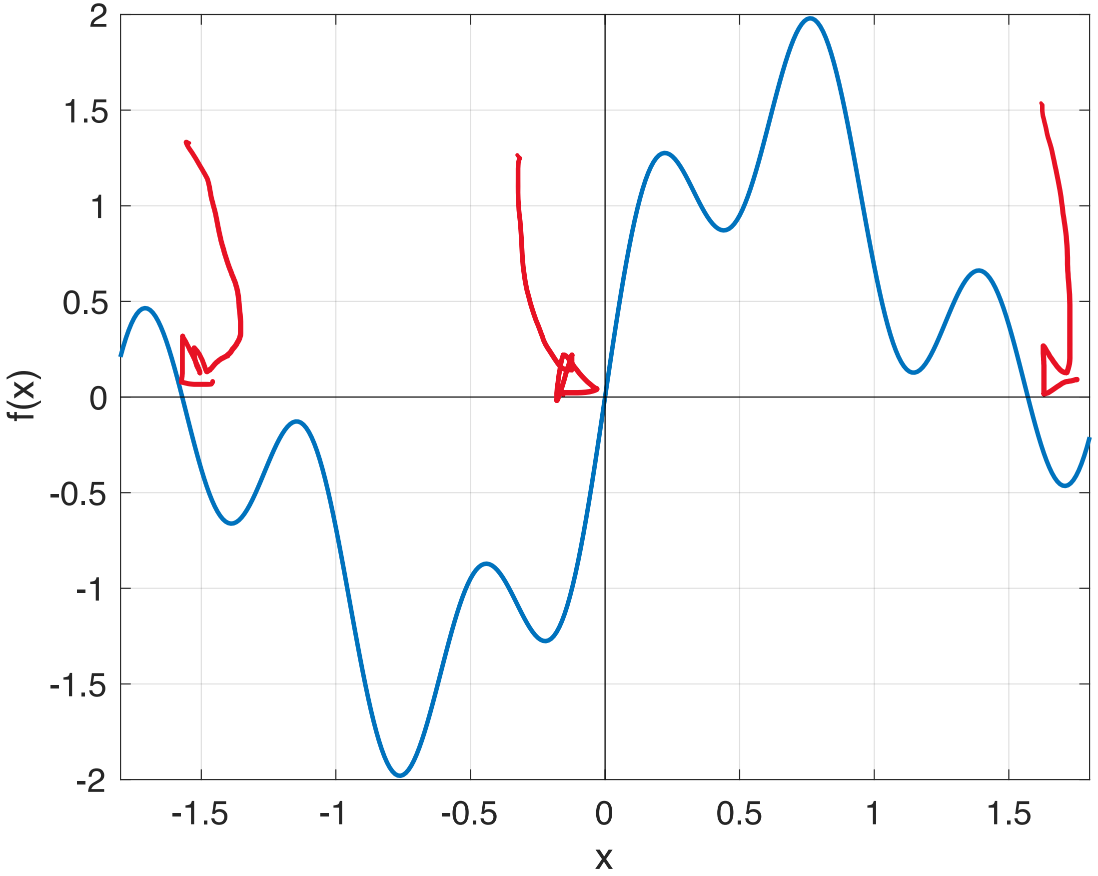
- $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$



Análisis de sistemas autónomos en 1D

- En la materia, desarrollaremos (entre otras cosas) formas de analizar el comportamiento de trayectorias *sin resolver las ecuaciones*. Es decir, sin llegar a una solución analítica.

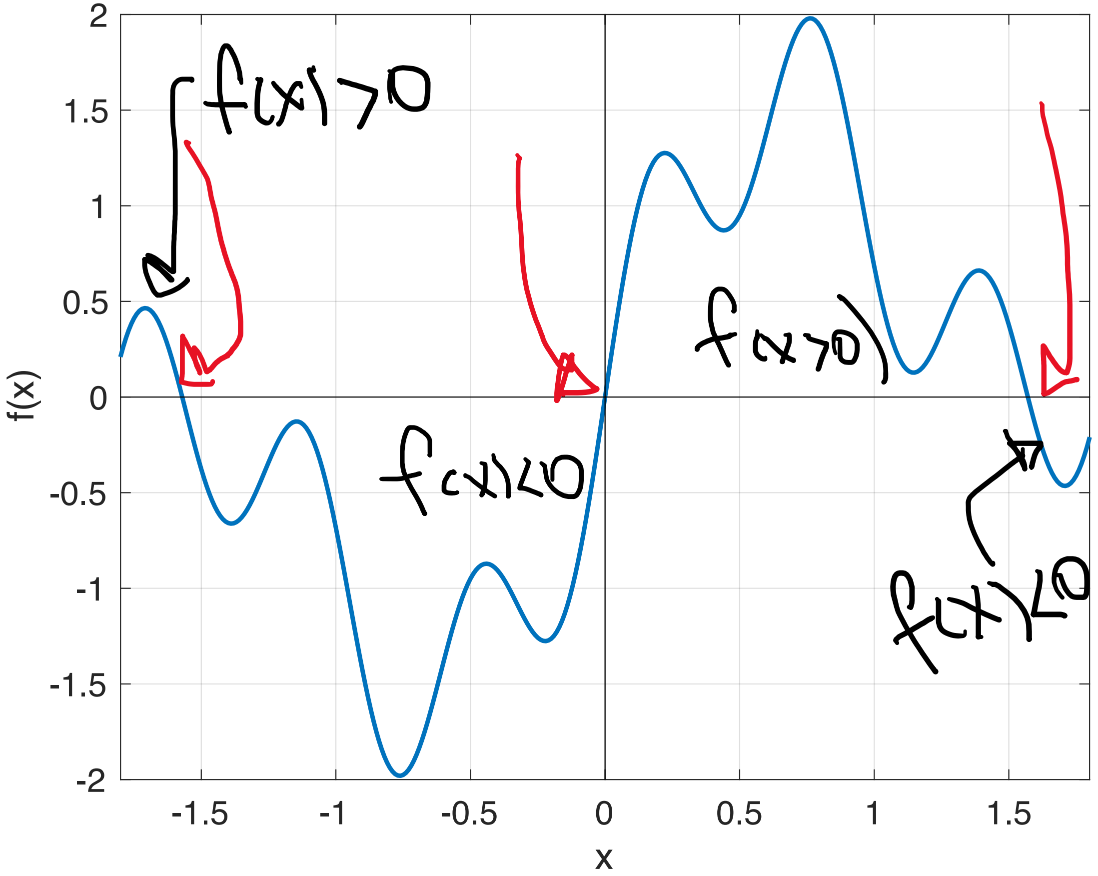
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$



Análisis de sistemas autónomos en 1D

- En la materia, desarrollaremos (entre otras cosas) formas de analizar el comportamiento de trayectorias *sin resolver las ecuaciones*. Es decir, sin llegar a una solución analítica.

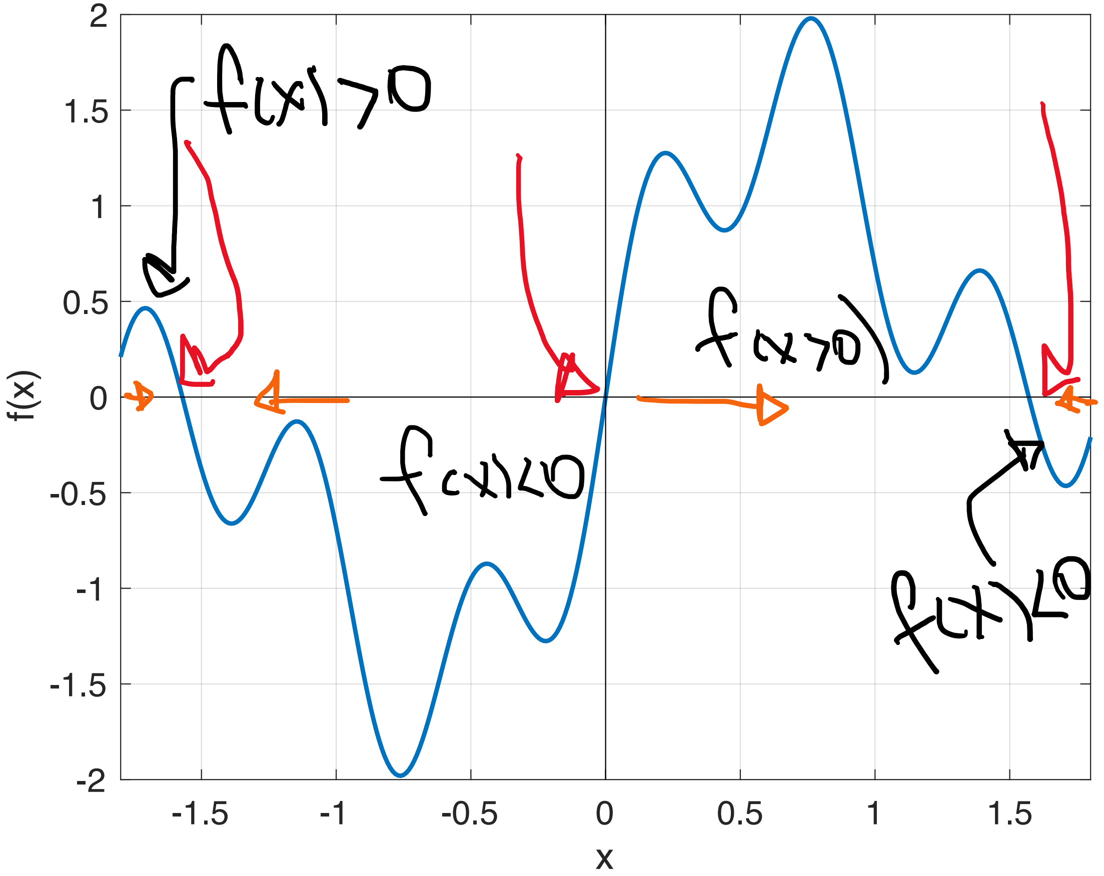
- $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(x)$



Análisis de sistemas autónomos en 1D

- En la materia, desarrollaremos (entre otras cosas) formas de analizar el comportamiento de trayectorias *sin resolver las ecuaciones*. Es decir, sin llegar a una solución analítica.

- $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt} = f(x)$



Análisis de sistemas autónomos en 1D

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

- Los puntos fijos separan regiones

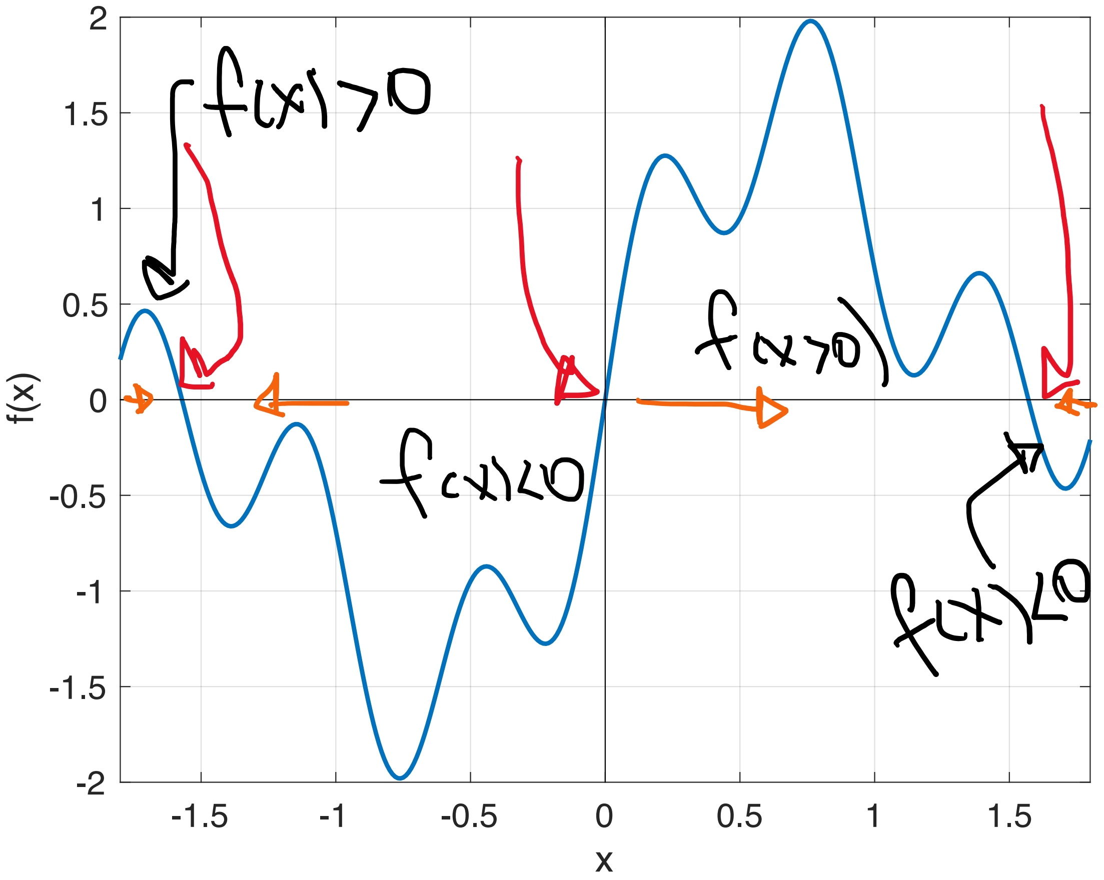
en las que f(x)>0 y f(x)<0.

- Esto da la *dirección del flujo*

(flechas naranjas)

- ¿Qué pasa en términos de la *estabilidad de los*

puntos fijos?



Análisis de sistemas autónomos en 1D

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$

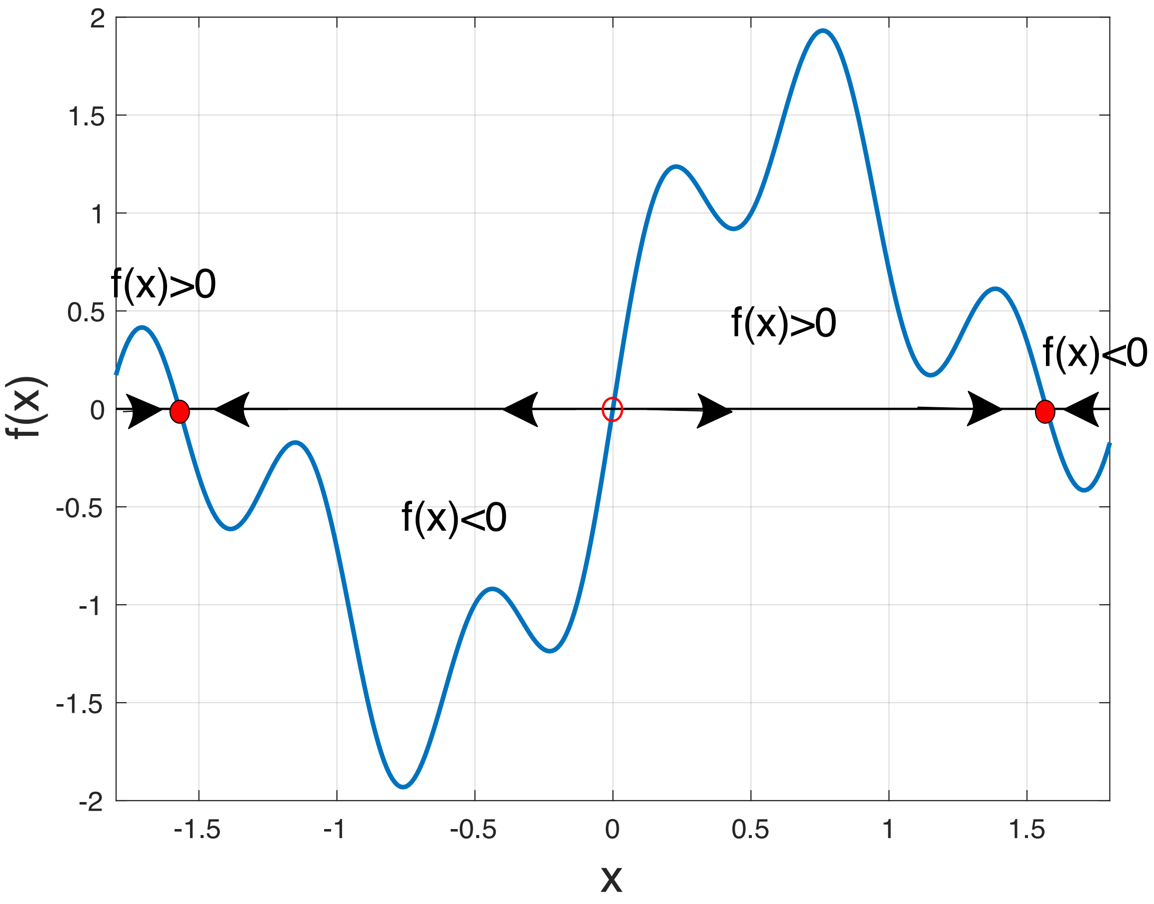
- Los puntos fijos separan regiones en las que f(x)>0 y f(x)<0.

- Esto da la *dirección del flujo*

  Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) > 0, \dot{\boldsymbol{x}} > 0$ y x crece.

  Si $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) < 0, \dot{\boldsymbol{x}} < 0$ y x decrece.

- ¿Qué pasa con la *estabilidad de los* puntos fijos?

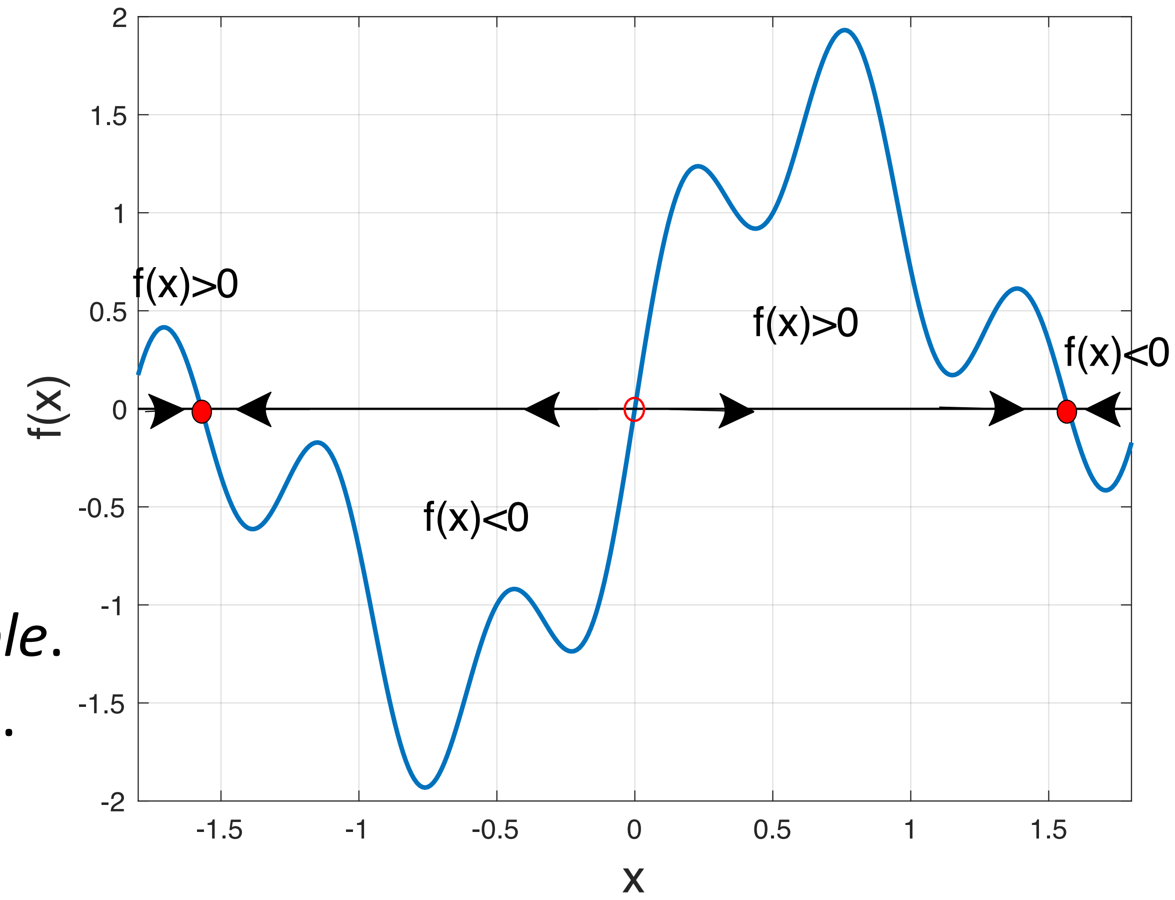


Estabilidad lineal

- La estabilidad de un punto fijo también puede evaluarse de manera analítica, evaluando la *derivada del campo vector en cada punto fijo*.

- $\frac{df}{dx}\Big|_{x^*} = f'(x^*)$

- Si $f'(x^*) > 0$ el punto fijo será *inestable*.
- Si $f'(x^*) < 0$ el punto fijo será *estable*.

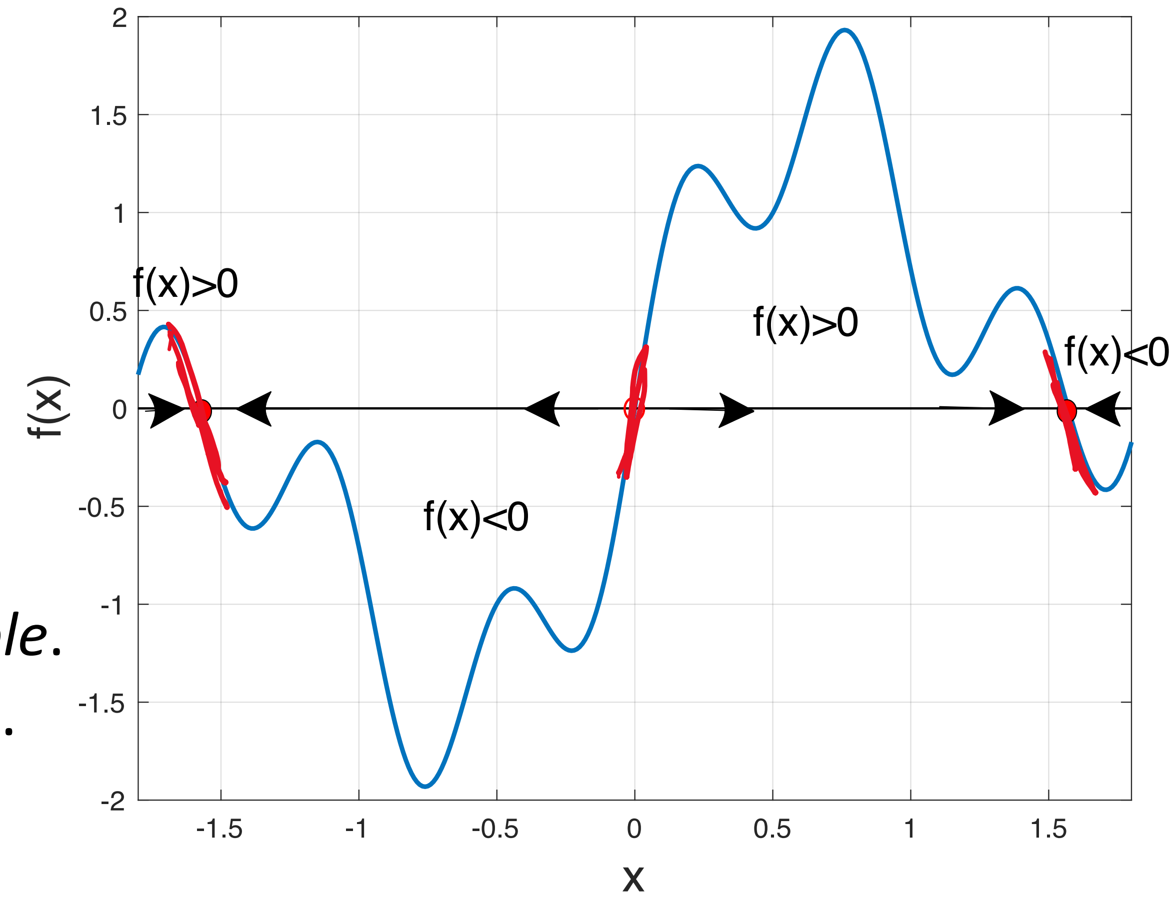


Estabilidad lineal

- La estabilidad de un punto fijo también puede evaluarse de manera analítica, evaluando la *derivada del campo vector en cada punto fijo*.

- $\frac{df}{dx}|_{x^*} = f'(x^*)$

- Si $f'(x^*) > 0$ el punto fijo será *inestable*.
- Si $f'(x^*) < 0$ el punto fijo será *estable*.



PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo

1. Analice las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden gráficamente. Primero grafique el campo vector. Luego encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de la trayectoria ($x(t)$) para distintas condiciones iniciales. Grafique alguna de estas trayectorias en el espacio de fases (i.e. el retrato de fases). Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada. Compruebe que las soluciones posibles para estos sistemas son de forma similar: o se aproximan a un valor o se alejan del mismo.

   (a) $\dot{x} = ax$ (sistema lineal en 1D, note el conjunto de soluciones acotada que presenta este sistema)

   (b) (*) $\dot{x} = 4x^2 - 16$

   (c) (*) $\dot{x} = x - x^3$

   (d) $\dot{x} = 1 + 0.5\cos x$

   (e) (*) $\dot{x} = e^x - \cos x$ (truco: grafique e^x y $\cos x$ en el mismo gráfico y busque las intersecciones. No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)

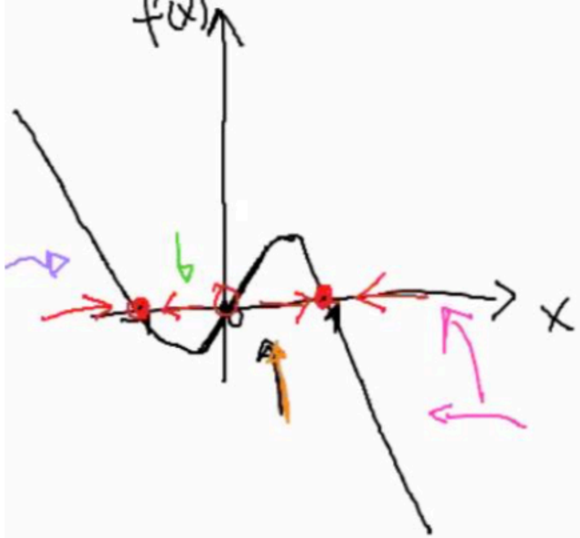
   (f) $\dot{x} = 1 - 2\cos x$

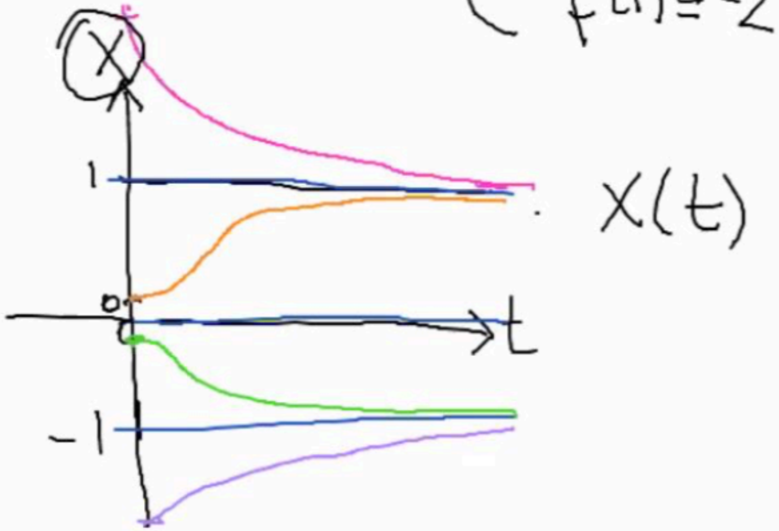
$$\dot{x} = \underline{x - x^3} = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$$

3pf x^*: $\{0, -1, 1\}$

Estabilided lineal:

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \begin{cases} f'(-1) = -2 < 0 \to \text{pf est.} \\ f'(0) = 1 > 0 \to \text{pf inest} \\ f'(1) = -2 < 0 \to \text{pf est.} \end{cases}$$





$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = f(x)$$

$$\boxed{\dot{x} = x - x^3}$$

Analíticamente

$$\frac{dx}{dt} = -x(x-1)(x+1)$$

$$\frac{dx}{x(x-1)(x+1)} = -dt$$

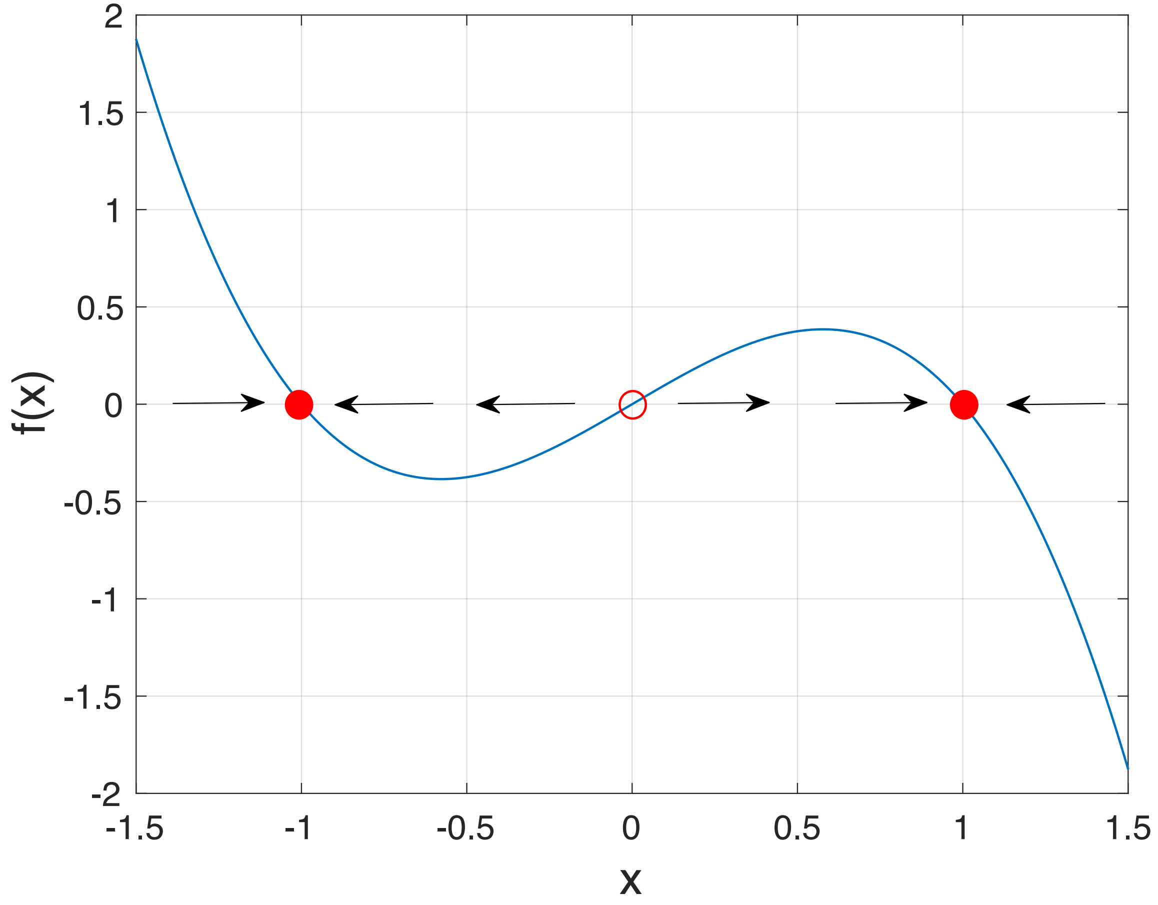
$$\frac{1}{x(x-1)(x+1)} = \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+1}\right)$$

$$A = -1 \quad B = \tfrac{1}{2} \quad C = \tfrac{1}{2}$$

$$-\int \frac{dx}{x} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} = -\int dt$$

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{(1 - Ae^{-2t})^{1/2}}}$$

PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo



(a) $\dot{x} = x - x^3 = x(1-x^2) = x(1-x)(1+x)$. Esto nos da 3 puntos fijos, $x^* = -1, x^* = 0$ y $x^* = 1$, con dos puntos fijos estables y uno inestable en el medio.

La estabilidad, analíticamente:

$$f'(x) = 1 - 3x^2$$

- $f'(x^* = -1) = 1 - 3 = -2 < 0$, lo que nos da un punto fijo estable.

- $f'(x^* = 0) = 1 > 0$, lo que nos da un punto fijo inestable.

- $f'(x^* = 1) = 1 - 3 = -2 < 0$, lo que nos da otro punto fijo estable.

PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo

3. (*) El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

   (a) Interprete a y b biológicamente.

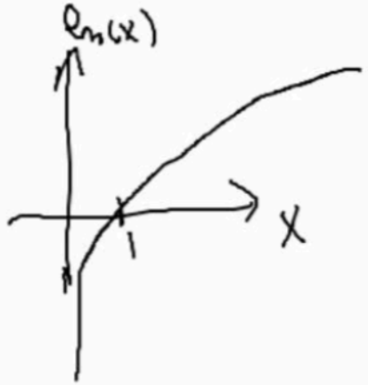
   (b) Dibuje el campo vector y grafique $N(t)$ para varias condiciones iniciales.

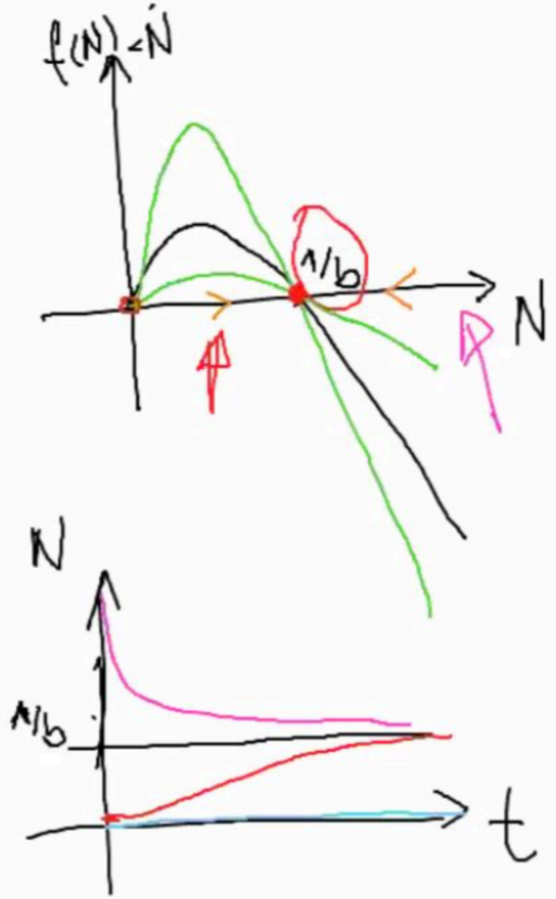
$$\dot N = -aN\ln(bN)$$

$$\dot N = 0 \;\to\; N^* = 0$$

$$\to\; N^* = 1/b$$

$$bN^* = 1$$





Estabilidad lineal

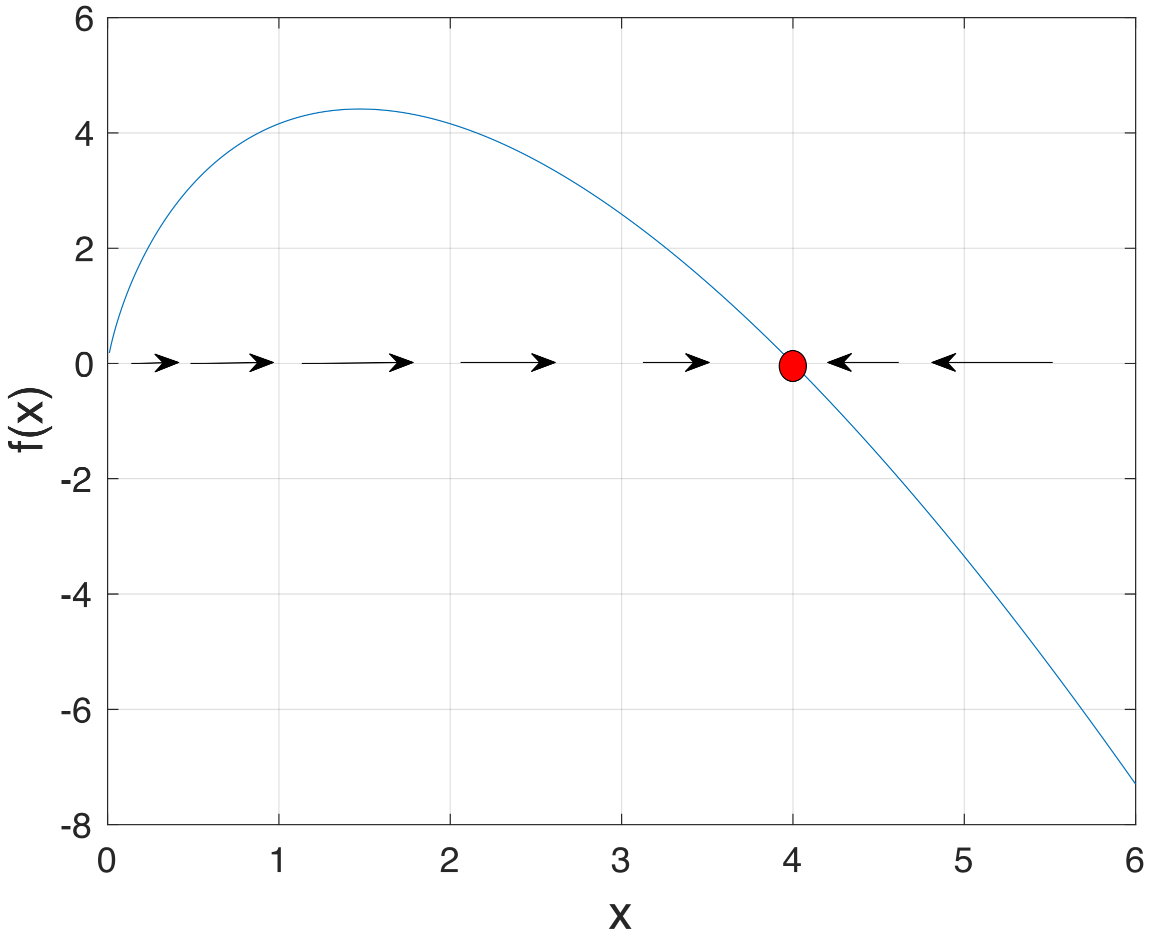
$$\frac{d\dot N}{dN} = -a\ln(bN) - a\cancel{N}\cdot\frac{1}{\cancel{bN}}\cdot\cancel{b}$$

$$\frac{d\dot N}{dN} = -a\left(\ln(bN)+1\right)$$

$$\left\{\begin{array}{l} \left.\dfrac{d\dot N}{dN}\right|_{N^*=0} = +\infty > 0 \;\; \underline{\text{inest.}} \\[2ex] \left.\dfrac{d\dot N}{dN}\right|_{N^*=1/b} = -a < 0 \;\; \underline{\text{est.}} \end{array}\right.$$

PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo

$\dot{N} = -aNln(bN)$, con $a, b > 0$ y $N(t)$ la evolución temporal de cantidad de células en un tumor.



(a) Antes de dibujar, analicemos la estabilidad de $N^* = 1/b$. Para esto, analizamos $\frac{d\dot{N}}{dN}$, la derivada de $\dot{N}$ respecto a *N*.

$\frac{d\dot{N}}{dN} = -aln(bN) - aN\frac{b}{bN} = -aln(bN) - a = -a(ln(bn) + 1)$. Si evaluamos esta expresión en $N^* = 1/b$, obtenemos $\frac{d\dot{N}}{dN} = -a$. Como $a > 0$, esto nos da un *punto fijo estable*.

Los parámetros a y b dan están relacionados con la tasa de crecimiento del tumor y el tamaño final y *estable* al que tiende el tumor, respectivamente, como veremos a continuación