DNL/MCA 2020
Práctica 24/04/2020
Cátedra Mindlin

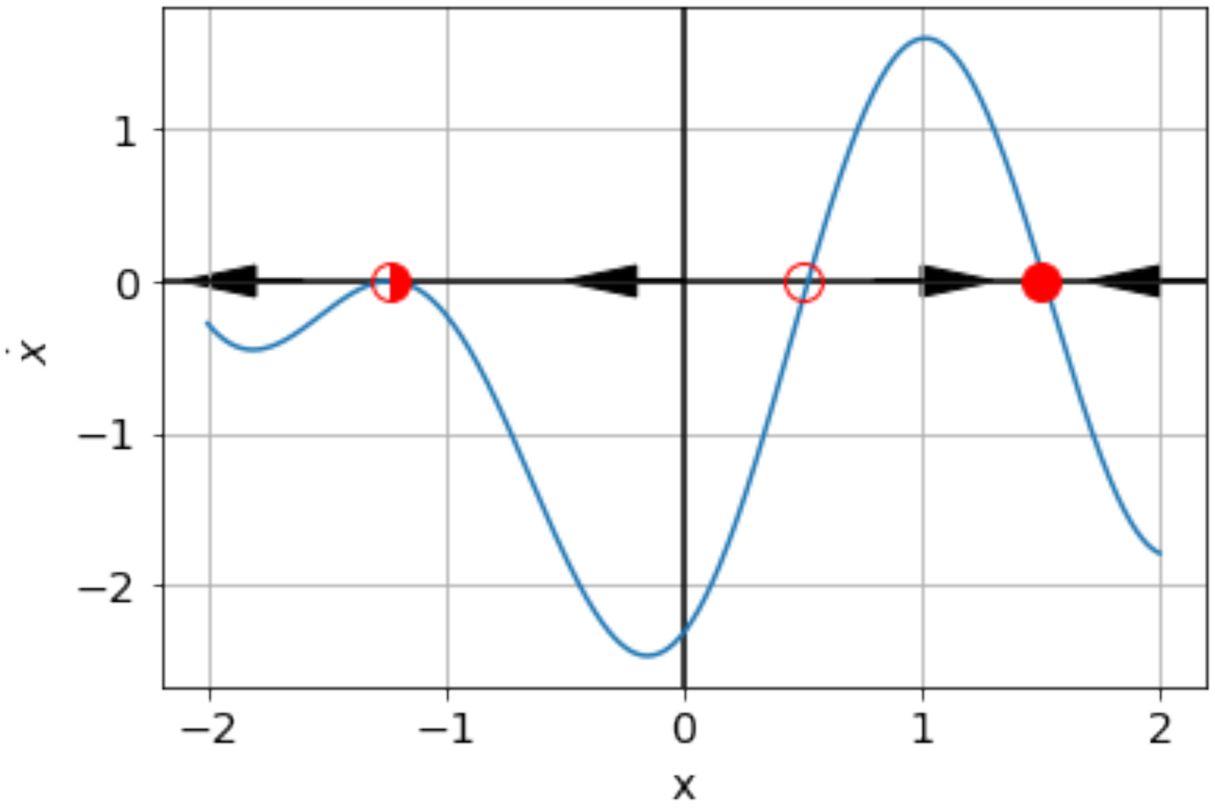
Orador hoy: Santiago Boari

Bifurcaciones 1D

- Asumimos campos *suficientemente suaves*, tales que la solución dada una c.i. sea única.
- Una *bifurcación* es un **cambio cualitativo del flujo** que ocurre cuando un parámetro del sistema (*r*) atraviesa un valor crítico o umbral (r_c).
- *Bifurcaciones locales o de punto fijo:* cambios de estabilidad y/o aparición/desaparición de puntos fijos. ¿Cómo encontrarlas? Analíticamente, planteando 2 condiciones:
- $\dot{x}_{(x_c\,,r_c)} \;=\; 0$ (condición de punto fijo)
- $\frac{d\dot{x}}{dx}|_{(x_c,r_c)} \;=\; 0$ (estabilidad indefinida al momento de la bifurcación
- Tenemos entonces dos ecuaciones, con dos incógnitas $(x_c\;, r_c)$.
- Ante cambios pequeños del parámetro, los puntos fijos con estabilidad definida no se ven afectados.

Bifurcaciones 1D: gráficamente

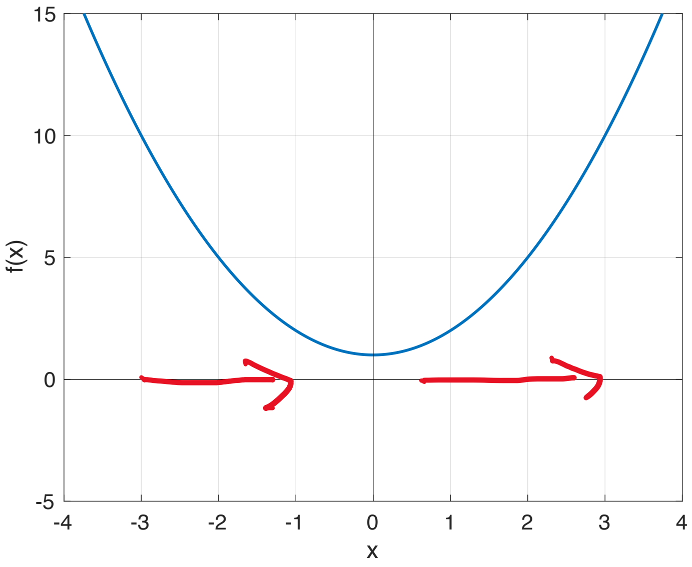
- Si subimos o bajamos la curva de la derecha, la cantidad de puntos fijos cambia.
- Perturbaciones del campo vector pueden inducir cambios cualitativos en el flujo:
    - Si **“subo un poco”,** del punto indefinido ”nacen” 2 pf
    - Si **“bajo un poco”**, el pf indefinido desaparece.



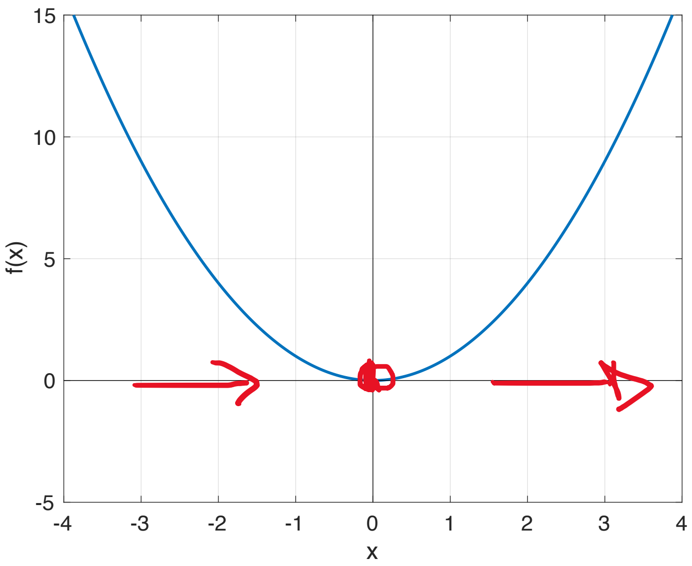
Catálogo de bifurcaciones 1D: **Saddle-node**

- Se caracteriza por la aparición/desaparición de 2 puntos fijos, uno estable y otro inestable.

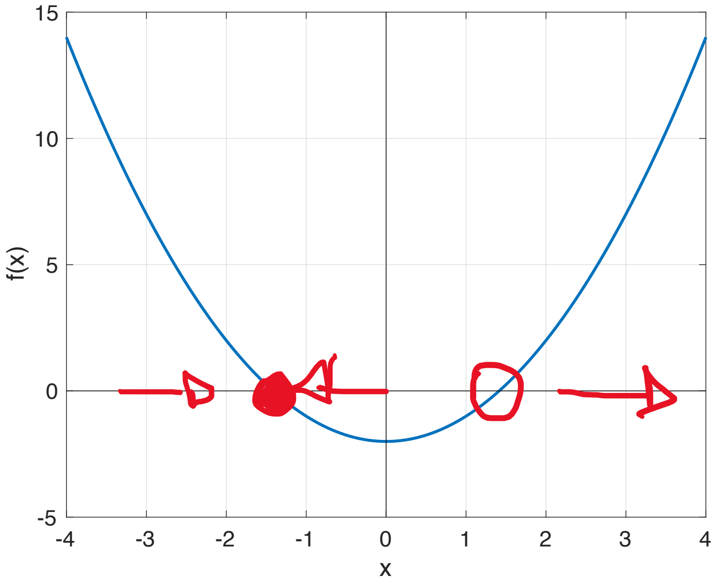
$$\dot{x} = r + x^2$$



$r > 0$
0 pf



$r = 0$
1 pf



$r < 0$
2 pf

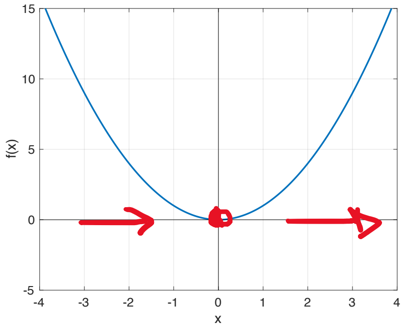
Catálogo de bifurcaciones 1D: **Saddle-node**

- Se caracteriza por la aparición/desaparición de 2 puntos fijos, uno estable y otro inestable.

$$\dot{x} = r + x^2$$

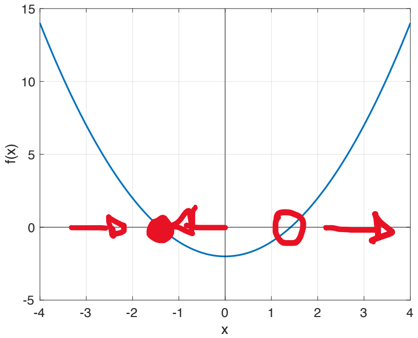
$r > 0$

0 pf



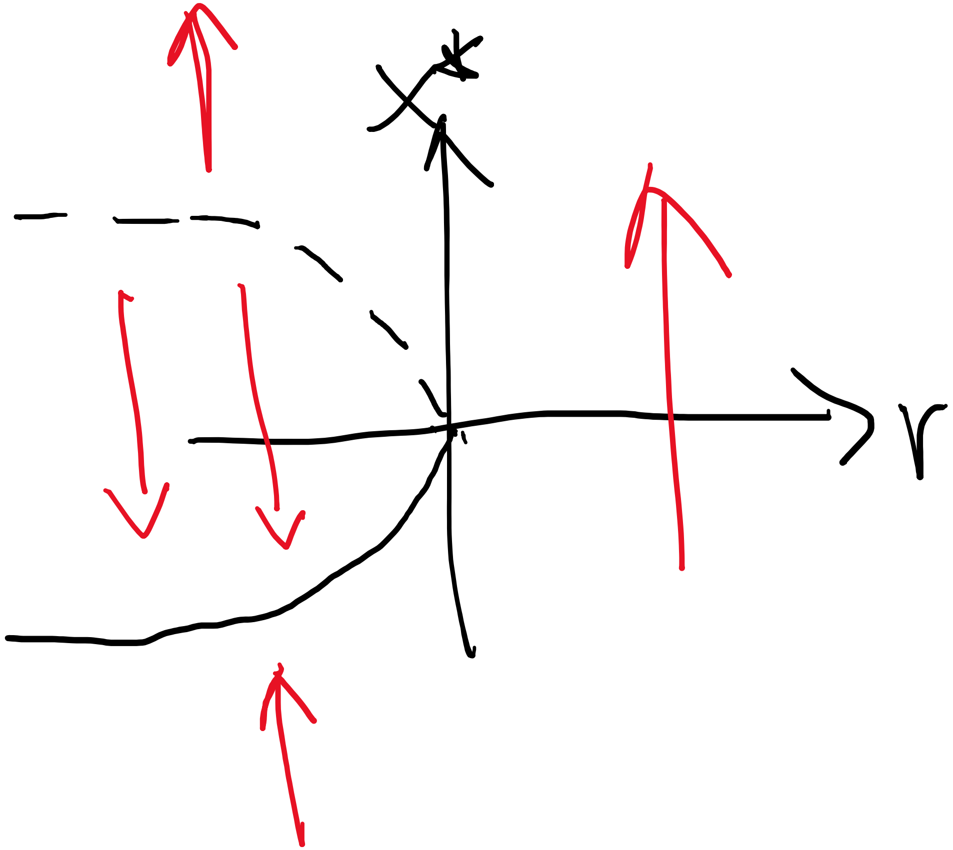
$r = 0$

1 pf



$r < 0$

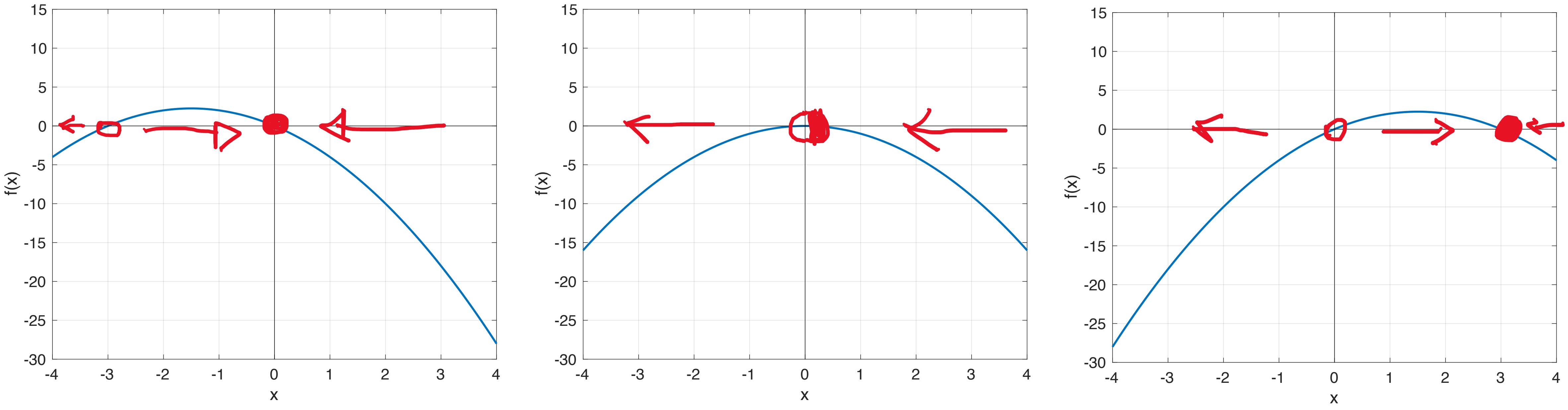
2 pf



Catálogo de bifurcaciones 1D: **Transcrítica**

- Se caracteriza por el *intercambio de estabilidad entre dos puntos fijos.*

$$\dot{x} = rx - x^2$$



$r < 0$
2 pf

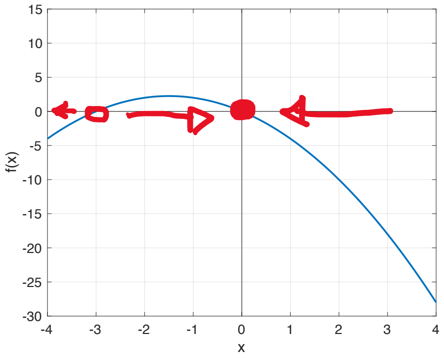
$r = 0$
1 pf

$r > 0$
2 pf

Catálogo de bifurcaciones 1D: **Transcrítica**

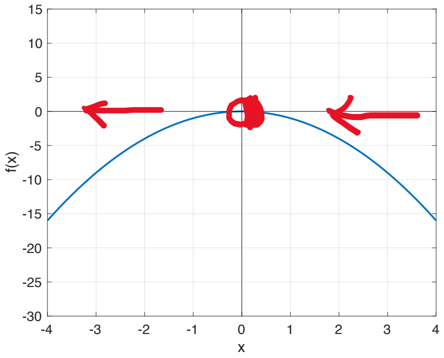
- Se caracteriza por el *intercambio de estabilidad entre dos puntos fijos.*

$$\dot{x} = rx - x^2$$



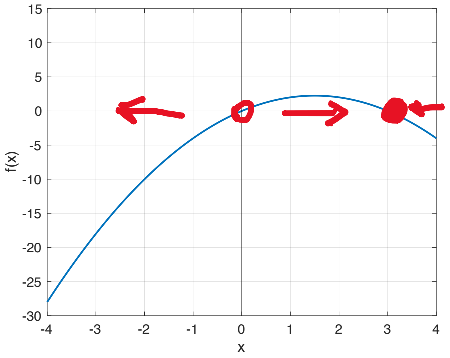
$r < 0$

2 pf



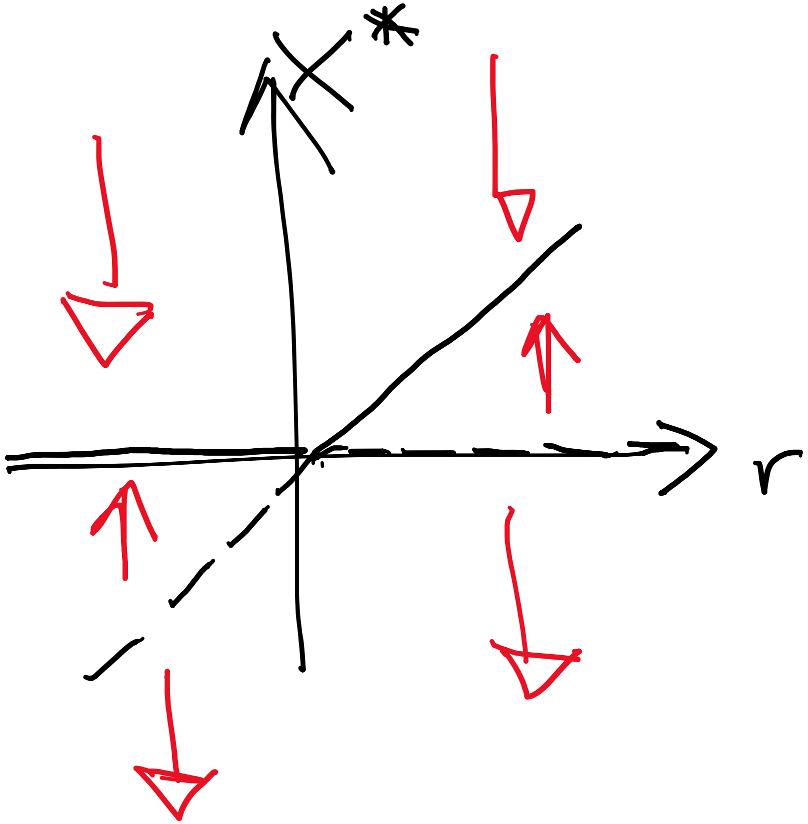
$r = 0$

1 pf



$r > 0$

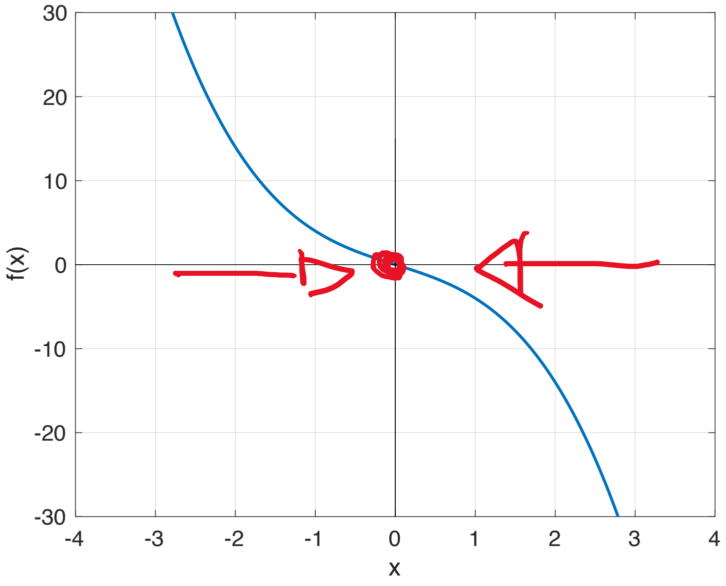
2 pf



Catálogo de bifurcaciones 1D: **Pitchfork**

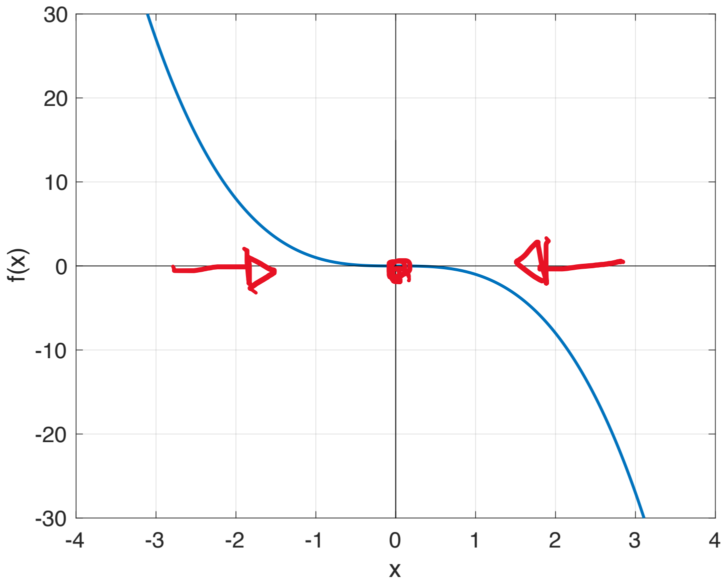
- Se caracteriza por la aparición/desaparición de 2 puntos fijos y el cambio de estabilidad de un tercer pf.

$\dot{x} = rx - x^3$ Supercrítica $\dot{x} = rx + x^3$ Subcrítica



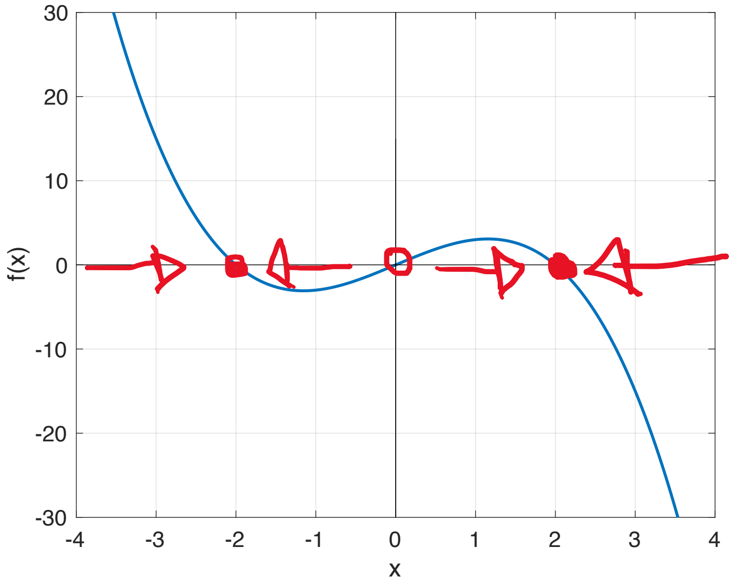
$r < 0$

1 pf



$r = 0$

1 pf



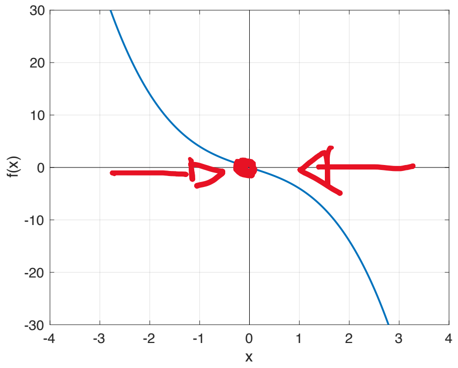
$r > 0$

3 pf

Catálogo de bifurcaciones 1D: **Pitchfork**

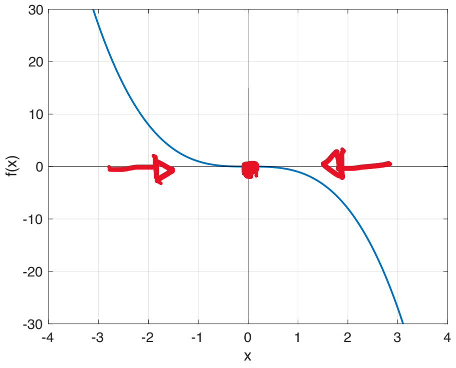
- Se caracteriza por la aparición/desaparición de 2 puntos fijos y el cambio de estabilidad de un tercer pf.

$\dot{x} = rx - x^3$ Supercrítica



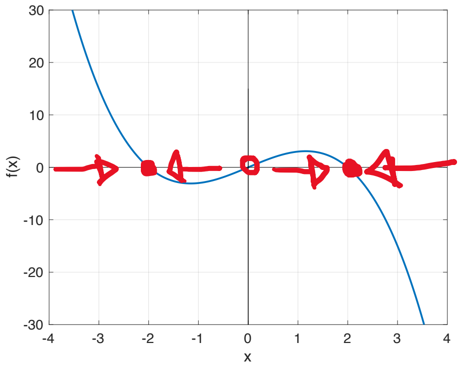
$r < 0$

1 pf



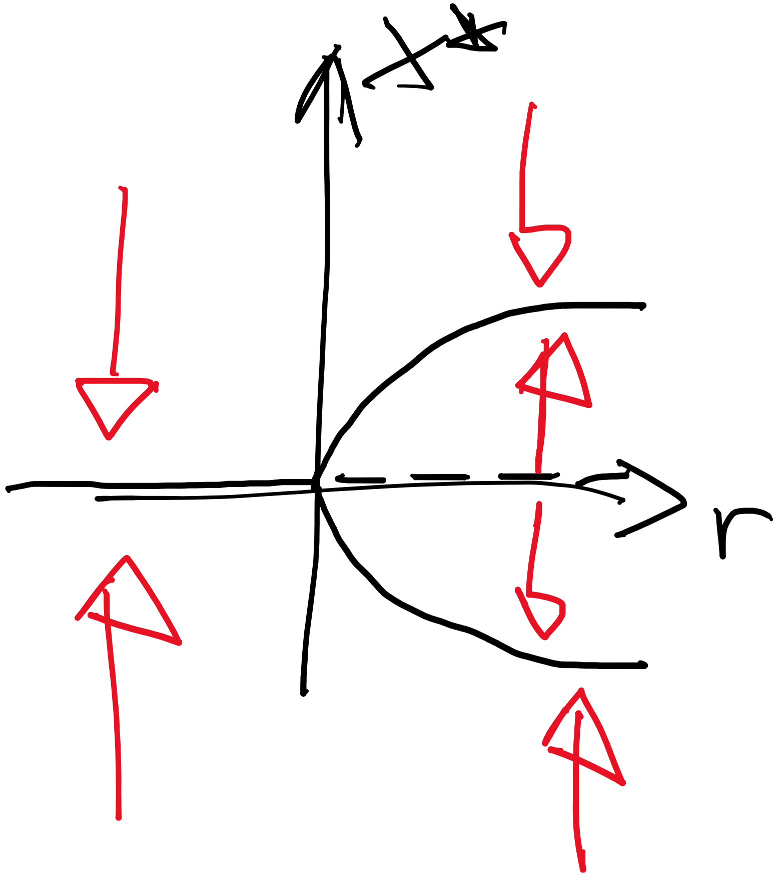
$r = 0$

1 pf



$r > 0$

3 pf



PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo

- Ejercicio adicional (no en la guía!) para resolver juntes

$$\dot{x} = xr - xe^{x}$$

$$0 = xr - xe^{x}$$

$$0 = x\,(\underbrace{r - e^{x}})$$

$$\boxed{x^* = 0} \quad \forall r$$

$$r = e^{x}$$

$$\boxed{\ln r = x^*} \quad \boxed{r > 0}$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = r - e^{x} - xe^{x}$$

$$\left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x^*=0} = r - 1 \quad \begin{cases} r < 1 \to \left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x^*=0} < 0 \text{ est.} \\ r_c = 1 \\ r > 1 \to \left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x^*=0} > 0 \text{ inest.} \end{cases}$$

$$\left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x^*=\ln r} = \cancel{r} - \cancel{r} - \ln r \cdot r = \underbrace{-r}_{<0}\,\underbrace{\ln r} \quad \begin{cases} 0 < r < 1 \quad \left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x^*=\ln r} > 0 \text{ inest} \\ r_c = 1 \\ r > 1 \quad \left.\frac{d\dot{x}}{dx}\right|_{x^*=\ln r} < 0 \text{ est.} \end{cases}$$

PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo

4. Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga qué tipo es (incluyendo si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.

   (a) (*) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$
   (b) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x^2}$
   (c) $\dot{x} = 5 - re^{-x^2}$
   (d) (*) $\dot{x} = x + \tanh(rx)$

ID: 986-6895-3474 Stop Share

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

Talking: Santiago Boari

Zoom Group Chat

sisi

From Debora Copacopa to Everyone:

jaja

From Valentín Agulló to Everyone:

si!

From Rostrio Zimmermann to Everyone:

si

To: Everyone File

Type message here...

PAUS ... +vamos al pizarrón en vivo

4. Determine ... parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga qué tipo es (incluyen ... ica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.

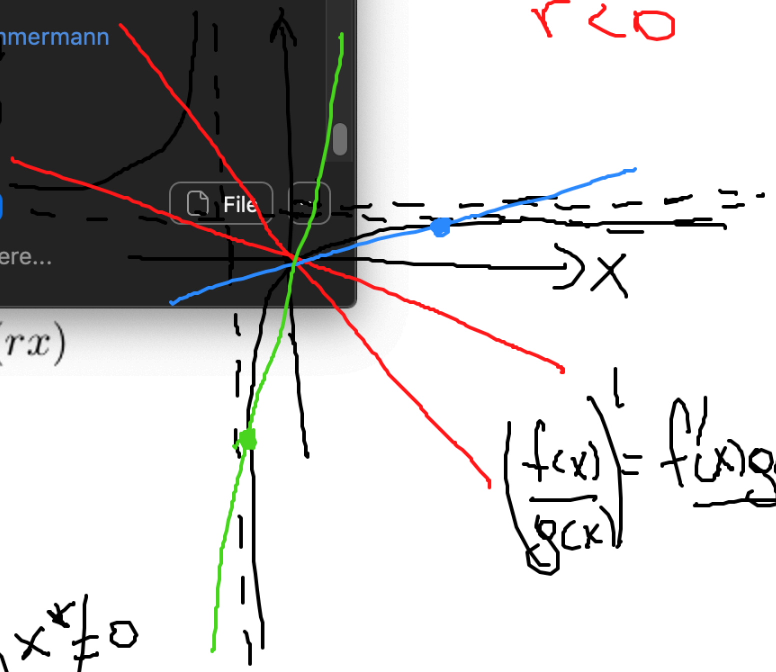
(a) (*) $\dot{x} = ...$

(b) $\dot{x} = rx ...$

(c) $\dot{x} = 5 ...$

(d) (*) $\dot{x} = x + \tanh(rx)$

$r < 0$



$$f'(x) = r - \left(\frac{1(1+x) - \cancel{x}(1)}{(1+x)^2}\right)$$

$$\boxed{f'(x) = r - \frac{1}{(1+x)^2}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$0 = rx - \frac{x}{1+x}$$

$$rx = \frac{x}{1+x} \quad x^* \neq 0$$

$$\boxed{x^* = 0}$$

$$r = \frac{1}{1+x}$$

$$r(1+x) = 1$$

$$1 + x = 1/r$$

$$\boxed{x^* = 1/r - 1}$$

PAUSA/CONSULTAS+vamos al pizarrón en vivo

4. Determine en los siguientes ejercicios el parámetro crítico donde ocurre una bifurcación, diga qué tipo es (incluyendo si es subcrítica o supercrítica), y finalmente dibuje un diagrama de bifurcaciones x^* vs. r.

(a) (*) $\dot{x} = rx - \frac{x}{1+x}$

(b) $\dot{x} = rx - \frac{x}{\ldots}$

(c)

(d)

$$f'(x)\Big|_{x^*=0} = r-1 \begin{cases} <0 & \text{si } r<1 \\ >0 & \text{si } r>1 \end{cases}$$

$$f'(x)\Big|_{x^*=\frac{1}{r}-1} = r - \frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{r}-1\right)\right)^2} = r(1-r) \begin{cases} r<0, & <0 \\ 0<r<1, & >0 \\ r>1, & <0 \end{cases}$$

$x^* = 0$

$x^* = \ldots$

$f'(x) = r - \frac{1}{(1+x)^2}$