Flujos 1d - 2.0

Dinámica no lineal
Cátedra G. Mindlin
Miércoles 22 de Abril 2020

El plan de hoy

- Breve repaso de la semana 1
- Flujo en el círculo
- Un problema de sincronización: Luciérnagas
- Consultas

Breve repaso de la semana 1

Estudiamos problemas así: $\dot{x} = f(x)$

Por ejemplo: Gompertz

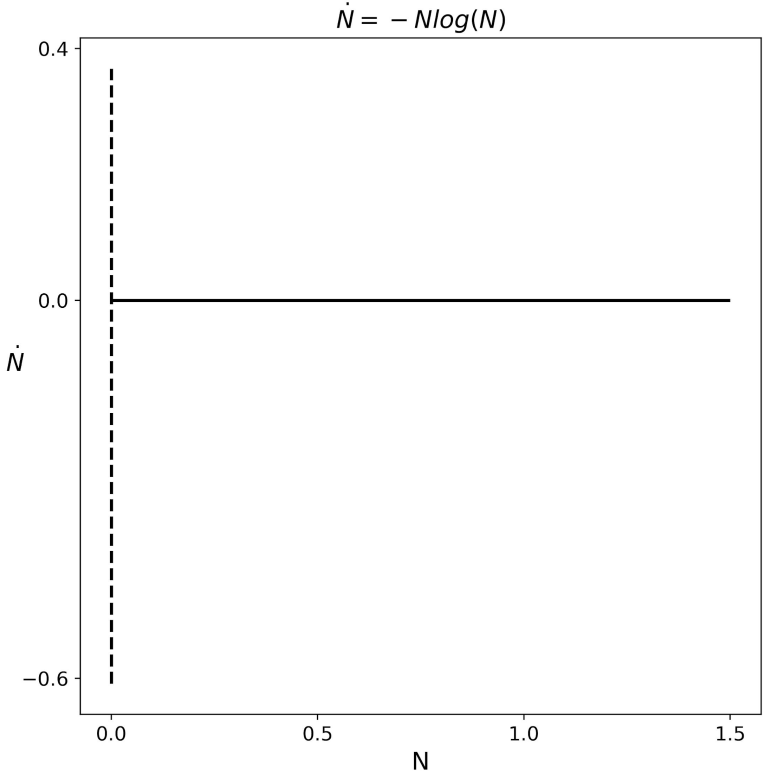
El espacio de fases es una recta

Dar un campo vector es dar flechas sobre la recta: velocidad en cada punto

Nos ayudamos con un eje auxiliar

Puntos fijos

Estabilidad



Breve repaso de la semana 1

Estudiamos problemas así: $\dot{x} = f(x)$

Por ejemplo: Gompertz

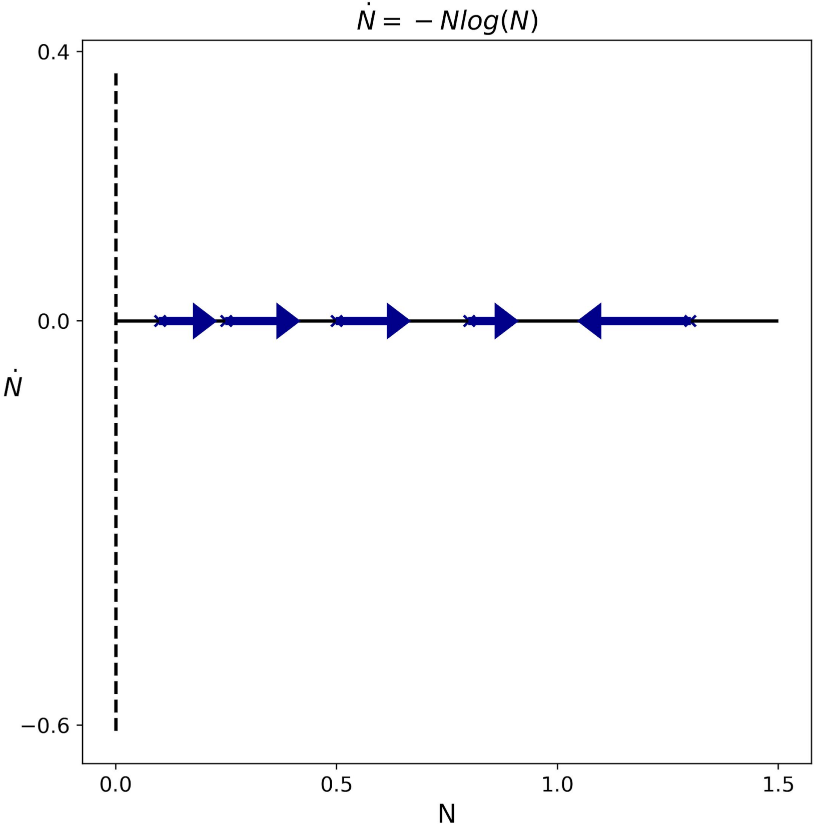
El espacio de fases es una recta

Dar un campo vector es dar flechas sobre la recta: velocidad en cada punto

Nos ayudamos con un eje auxiliar

Puntos fijos

Estabilidad



Breve repaso de la semana 1

Estudiamos problemas así: $\dot{x} = f(x)$

Por ejemplo: Gompertz

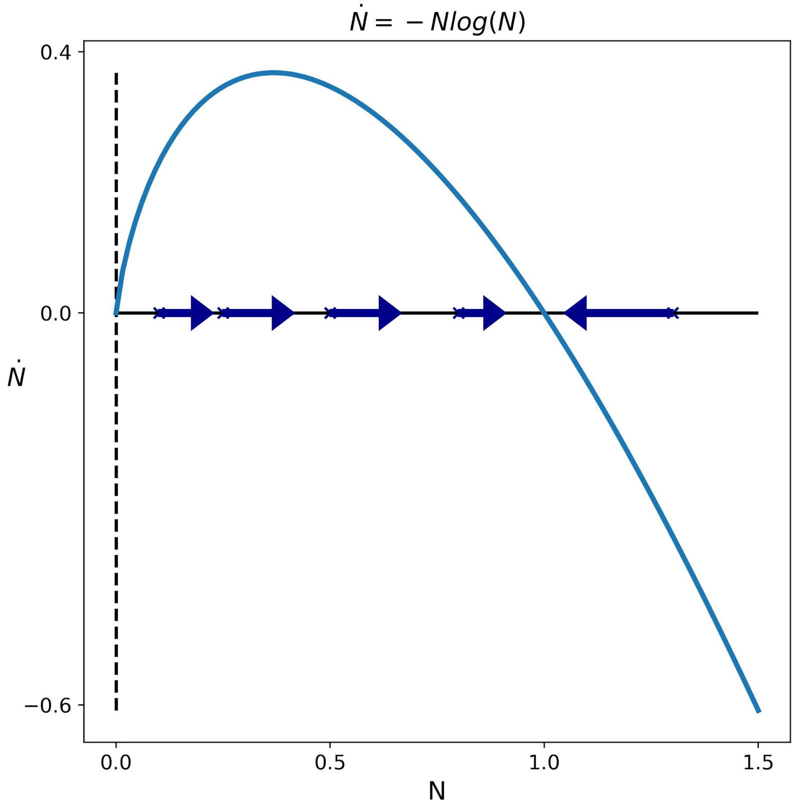
El espacio de fases es una recta

Dar un campo vector es dar flechas sobre la recta: velocidad en cada punto

Nos ayudamos con un eje auxiliar

Puntos fijos

Estabilidad



Breve repaso de la semana 1

Estudiamos problemas así: $\dot{x} = f(x)$

Por ejemplo: Gompertz

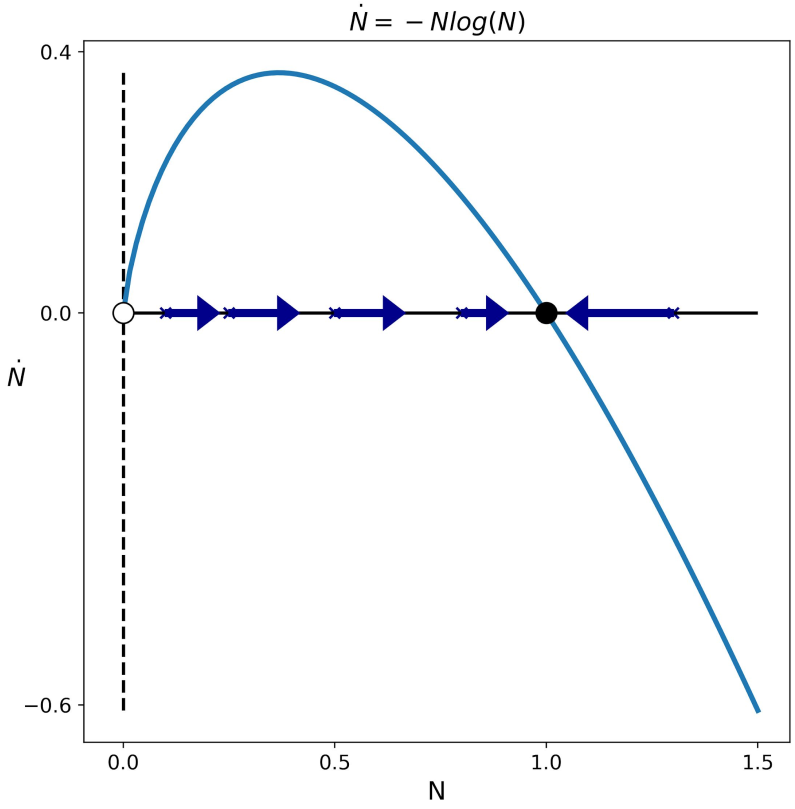
El espacio de fases es una recta

Dar un campo vector es dar flechas sobre la recta: velocidad en cada punto

Nos ayudamos con un eje auxiliar

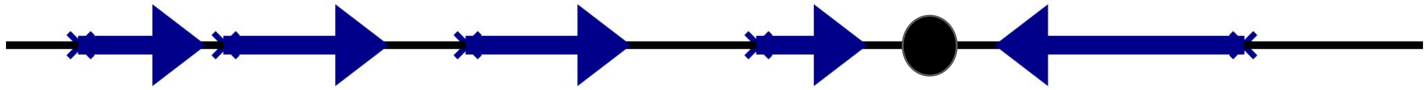
Puntos fijos

Estabilidad



Breve repaso de la semana 1

En 1d podemos movernos monótonamente a la derecha, izquierda o estar quietos. $\dot{x} = f(x)$



No puedo frenar y volver! Cada punto tiene un único futuro. Entonces....

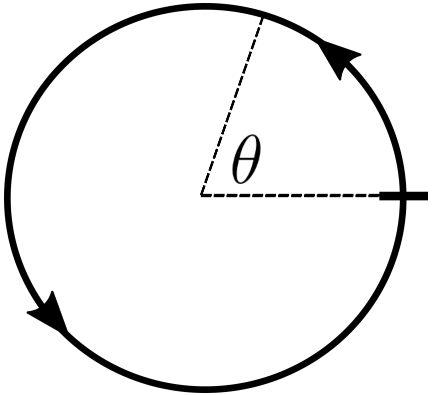
En 1d no puedo oscilar!

salvo que...

Flujo en el círculo

No puedo oscilar... salvo que defina un campo vector en el círculo:

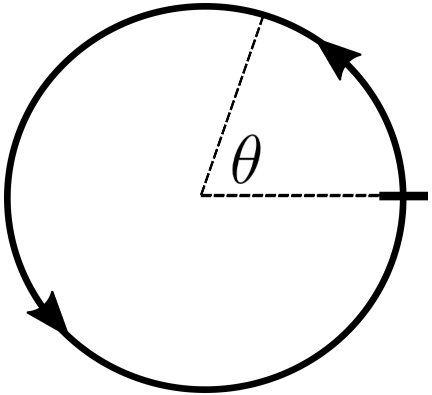
$$\dot{\theta} = f(\theta)$$



Flujo en el círculo

No puedo oscilar... salvo que defina un campo vector en el círculo:

$$\dot{\theta} = f(\theta)$$

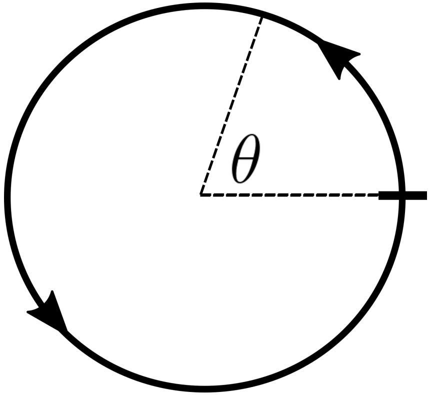


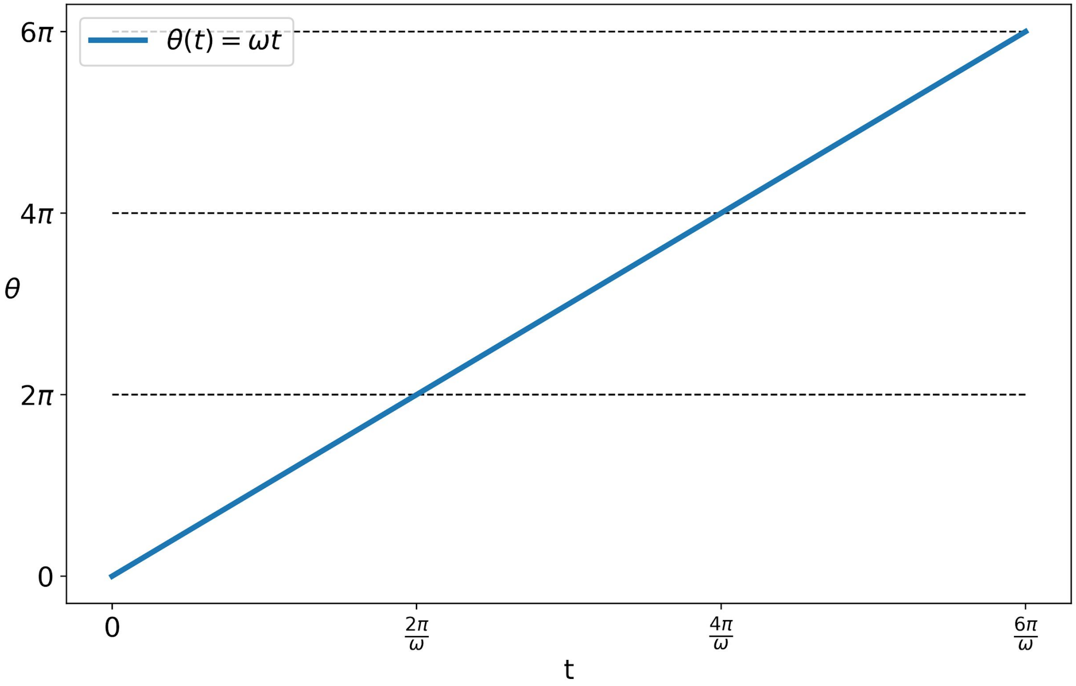
Ejemplo 1: $\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$

Flujo en el círculo

Ejemplo 1:

$$\dot{\theta} = \omega \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \omega t$$





Flujo en el círculo

Ejemplo 2: $\dot{\theta} = cos(\theta)$

Flujo en el círculo

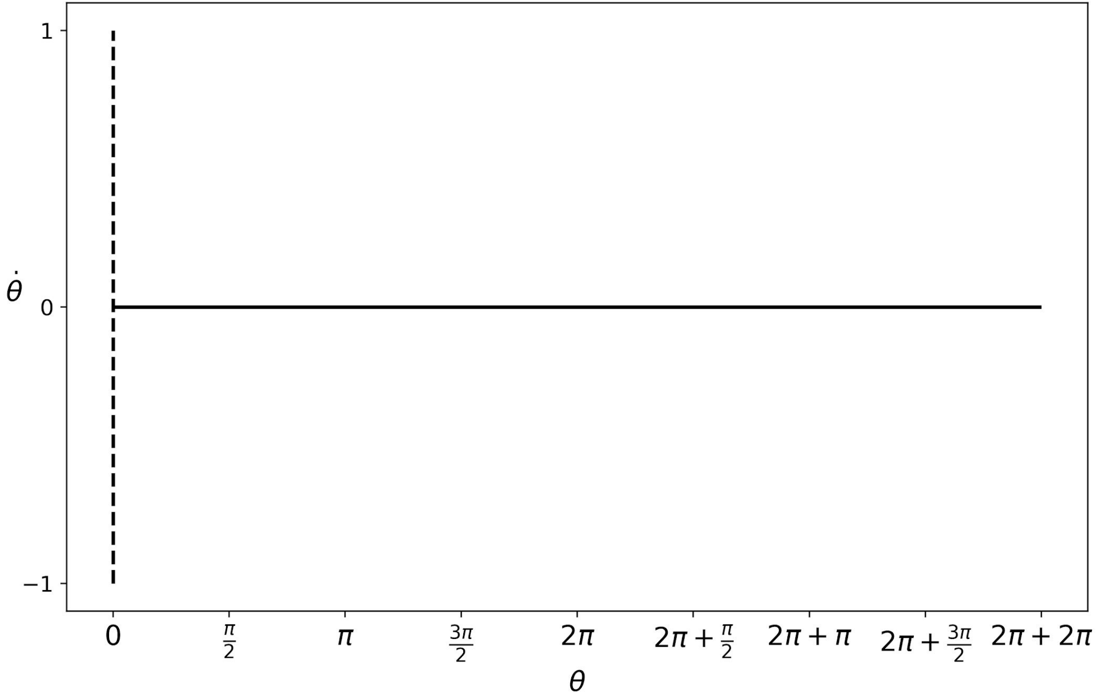
Ejemplo 2: $$\dot{\theta} = cos(\theta)$$

(1) Puntos fijos: $$\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow cos(\theta^*) = 0 \Rightarrow \theta^* = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{7\pi}{2}, \dots$$

(2) Estabilidad: lo hacemos gráfico

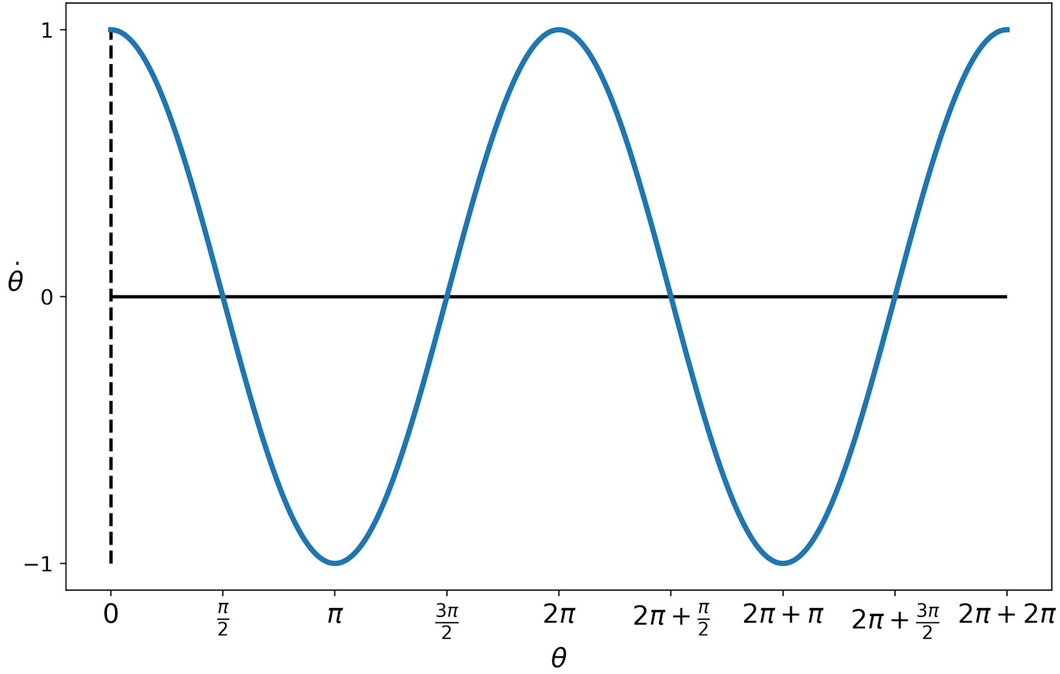
Flujo en el círculo

Ejemplo 2: $$\dot{\theta} = cos(\theta)$$



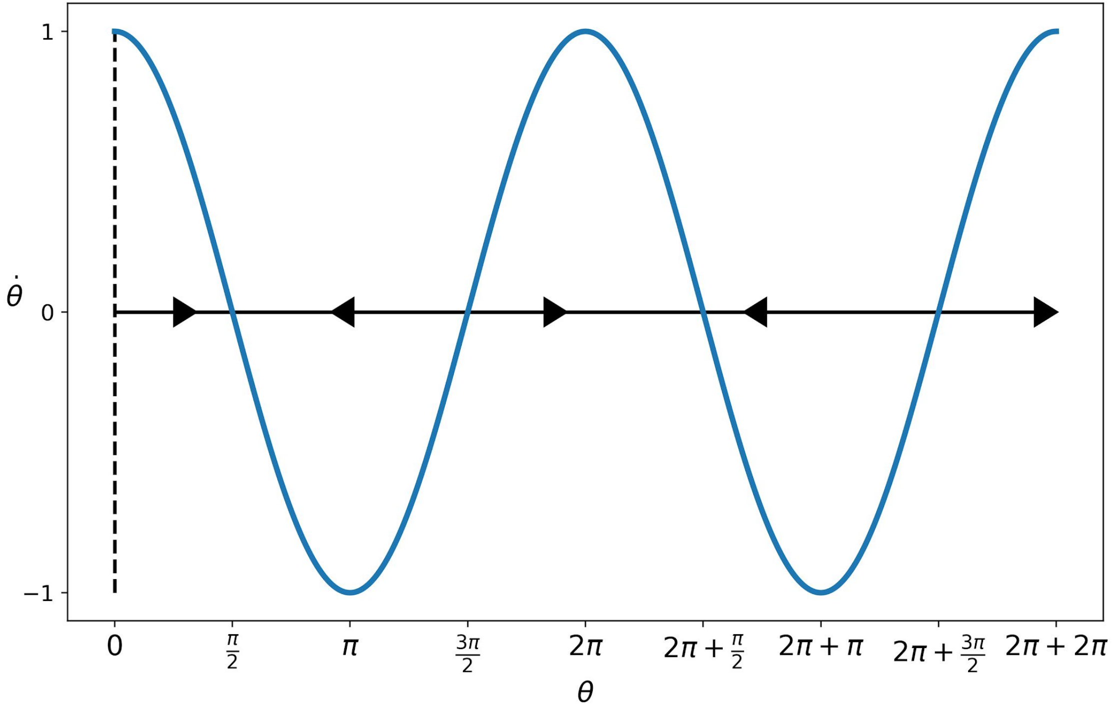
Flujo en el círculo

Ejemplo 2: $$\dot{\theta} = cos(\theta)$$



Flujo en el círculo

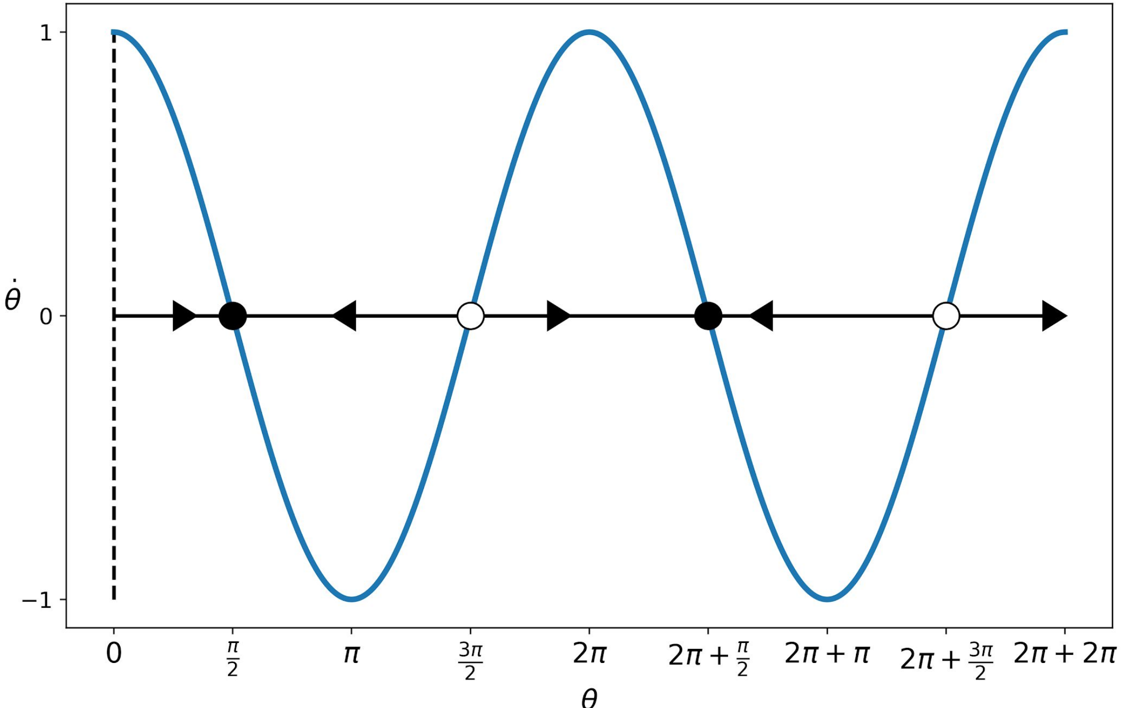
Ejemplo 2: $$\dot{\theta} = cos(\theta)$$



Flujo en el círculo

Ejemplo 2: $\dot{\theta} = cos(\theta)$

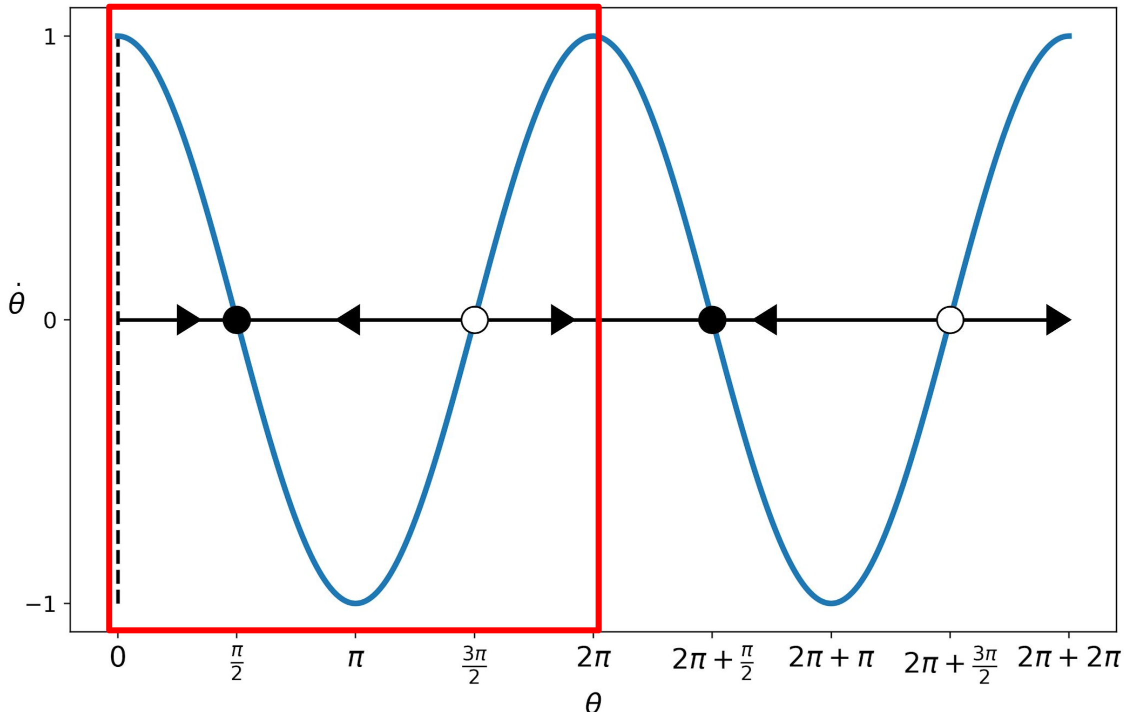
Che, pero… ¿ cuál es la diferencia con los problemas en la recta?



Flujo en el círculo

Ejemplo 2: $$\dot{\theta} = cos(\theta)$$

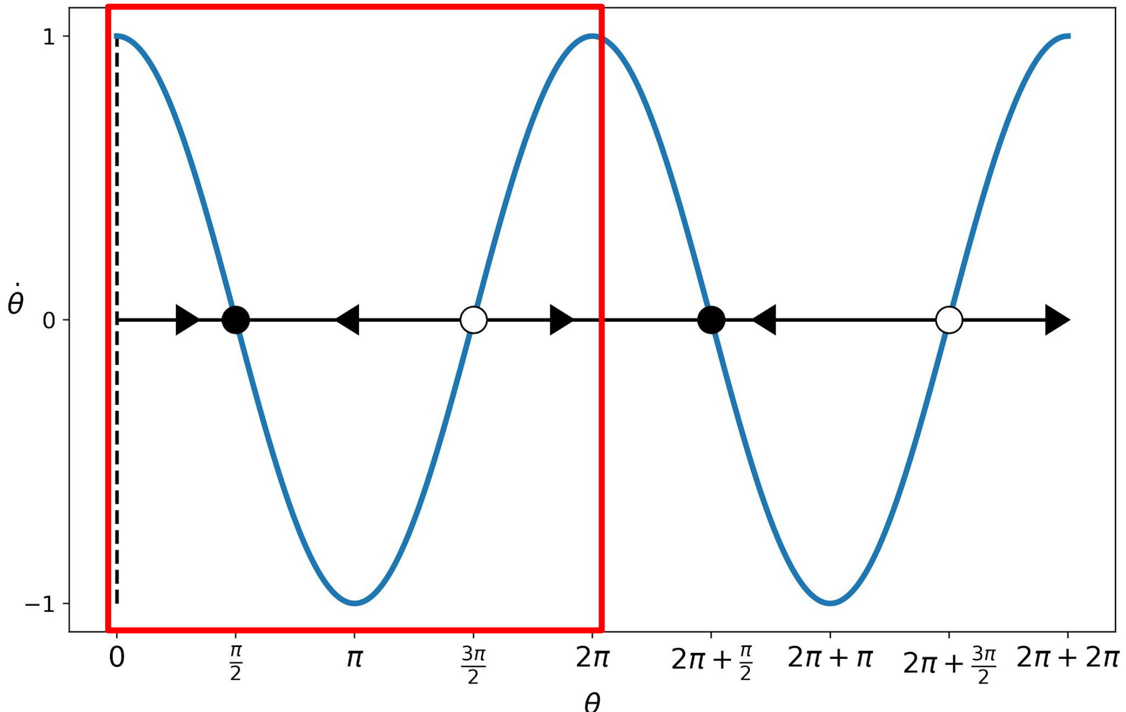
Che, pero… ¿ cuál es la diferencia con los problemas en la recta?

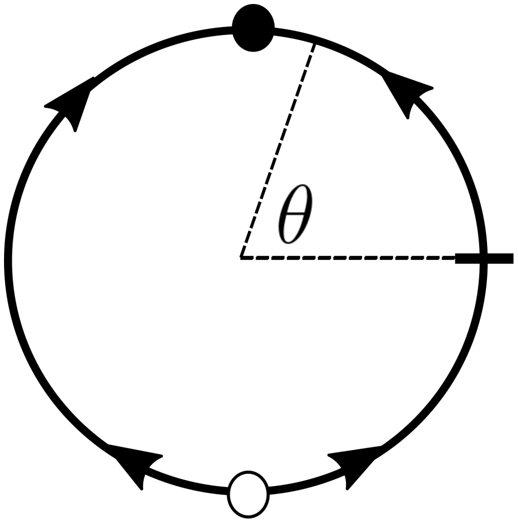


Flujo en el círculo

Ejemplo 2: $\dot{\theta} = cos(\theta)$

Che, pero… ¿ cuál es la diferencia con los problemas en la recta?





Flujo en el círculo

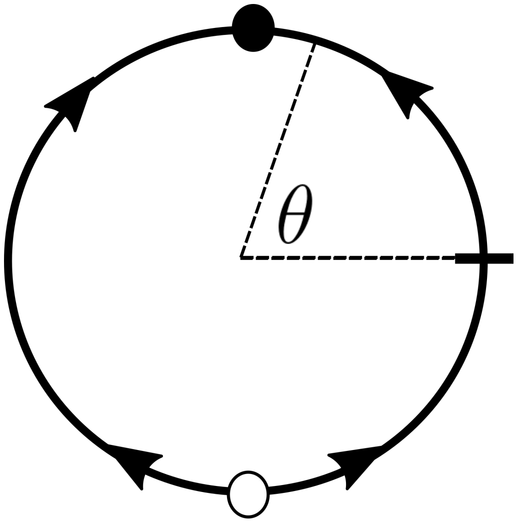
Ejemplo 2: $$\dot{\theta} = cos(\theta)$$

Che, pero… ¿ cuál es la diferencia con los problemas en la recta?

Podemos pensar al flujo en el círculo como un problema en la recta en el que tenemos un campo vector 2pi - periódico.

Veo lo mismo entre 0 y 2pi que entre 2pi y 4pi

Reconocemos 0, 2pi, 4pi, 6pi,... como el mismo punto!



Luciérnagas

7. (*) **Flujo en el círculo. Luciérnagas.** Las luciérnagas proporcionan uno de los ejemplos más espectaculares de sincronización en la naturaleza. En algunas partes del sudeste asiático, miles de luciérnagas machos se reúnen en los árboles por la noche y se encienden y apagan al unísono. Considere para este fenómeno el modelo $\dot{\Theta} = \Omega, \dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$, donde Θ es la fase de un estímulo externo, θ es la fase de destello de una luciérnaga individual y f, en este caso, una onda triangular,

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases} \tag{1}$$

en el intervalo $-\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$, y extienda periódicamente f fuera de este intervalo. (Ver Strogatz sección 4.5)

(a) Grafique $f(\phi)$.

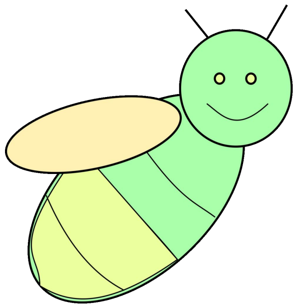
(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

(c) En el caso en que las luciérnagas no están lockeadas al estímulo, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fase en cambiar en 2π:

$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}(\phi)}$$

https://www.youtube.com/watch?v=ZGvtnE1Wy6U

Del experimento al modelo

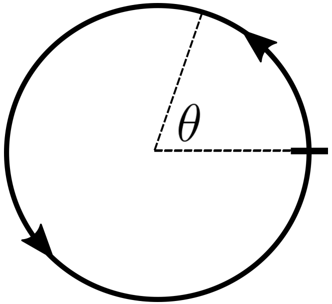


Observaciones:

Una luciérnaga destella con una frecuencia natural

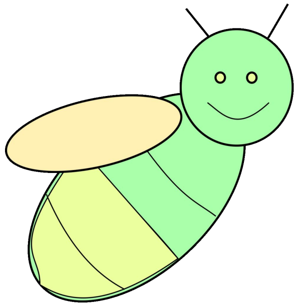
Es un evento periódico: lo podemos modelar sobre el círculo

Destellar es cruzar theta=0



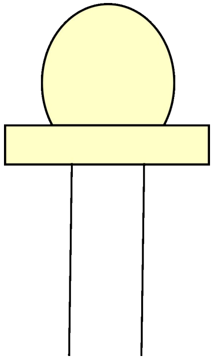
$$\dot{\theta} = \omega$$

Del experimento al modelo



$$\theta$$

$$\dot{\theta} = \omega$$



$$\Theta$$

Vamos a “forzar” la luciérnaga con un LED. Lo prendemos y apagamos con frecuencia OMEGA (mayúscula)

$$\dot{\Theta} = \Omega$$

Si la luciernaga no ve el LED, no pasa nada, sigue como siempre.

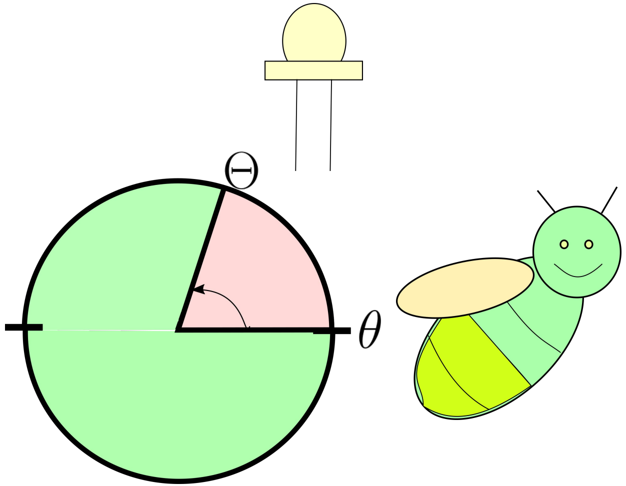
¿Qué pasa cuando lo ve?

Del experimento al modelo

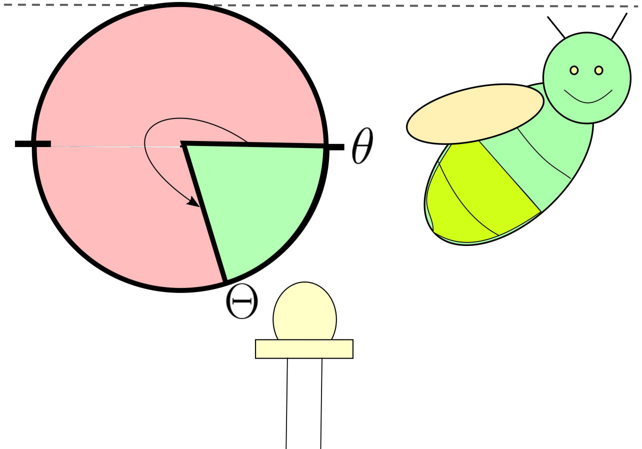
Observaciones:

(1) Si la diferencia de fase es menor a pi
-> La luciérnaga aumenta velocidad

$$\phi = \Theta - \theta$$



(2) Si la diferencia de fase es mayor a pi
-> La luciérnaga baja velocidad



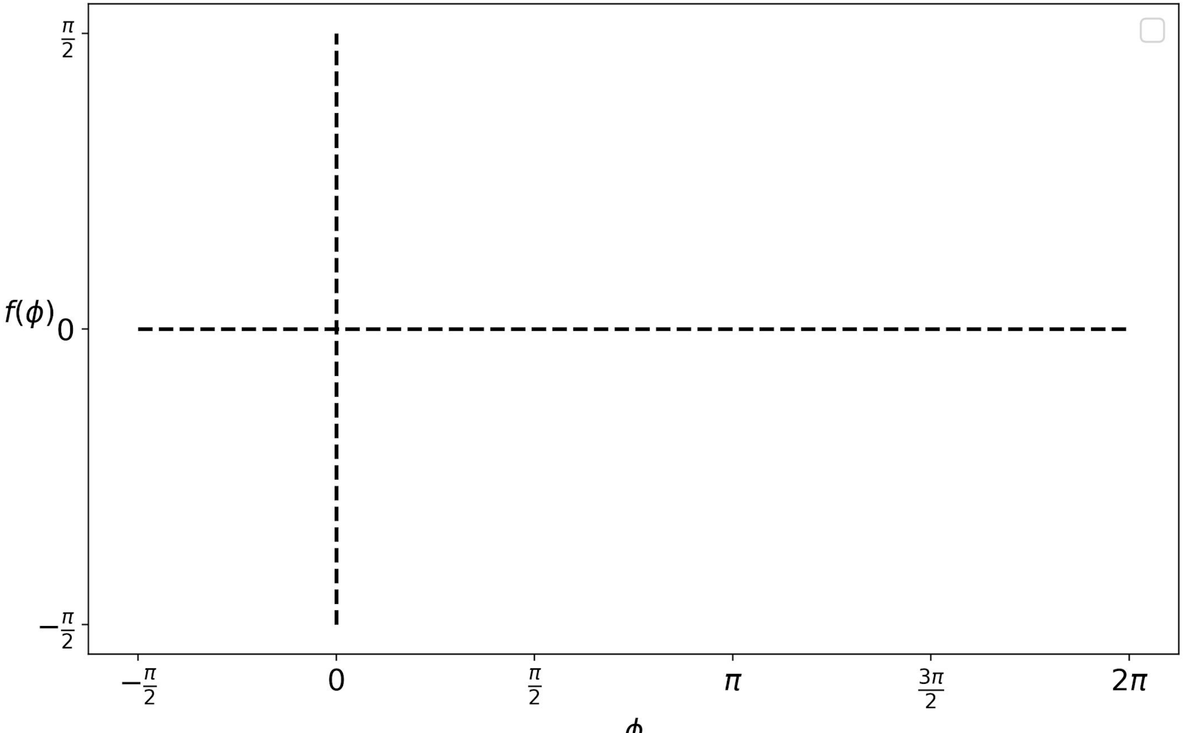
El modelo

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\Theta} &= \Omega \\ \dot{\theta} &= \omega + Af(\Theta - \theta)\end{aligned}}$$

$$\dot{\Theta} = \Omega$$
$$\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$$

Dibujemos a f

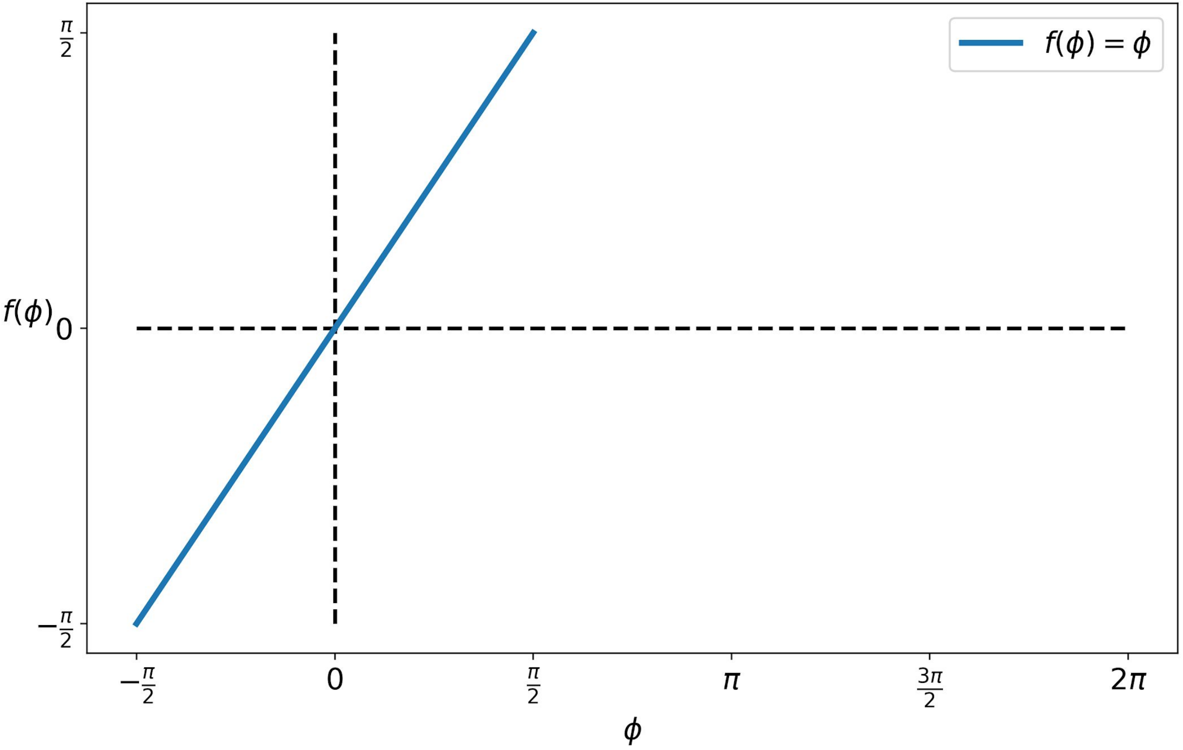
$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases}$$



$$\dot{\Theta} = \Omega$$
$$\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$$

Dibujemos a f

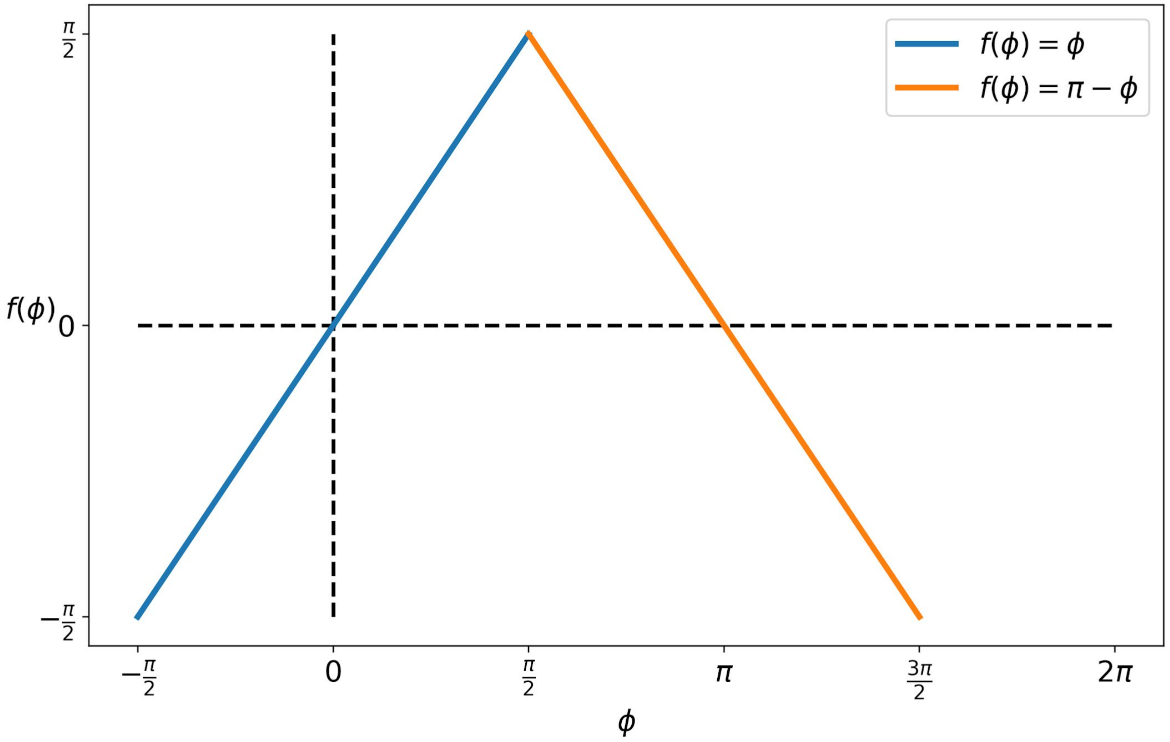
$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases}$$



$$\dot{\Theta} = \Omega$$
$$\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$$

Dibujemos a f

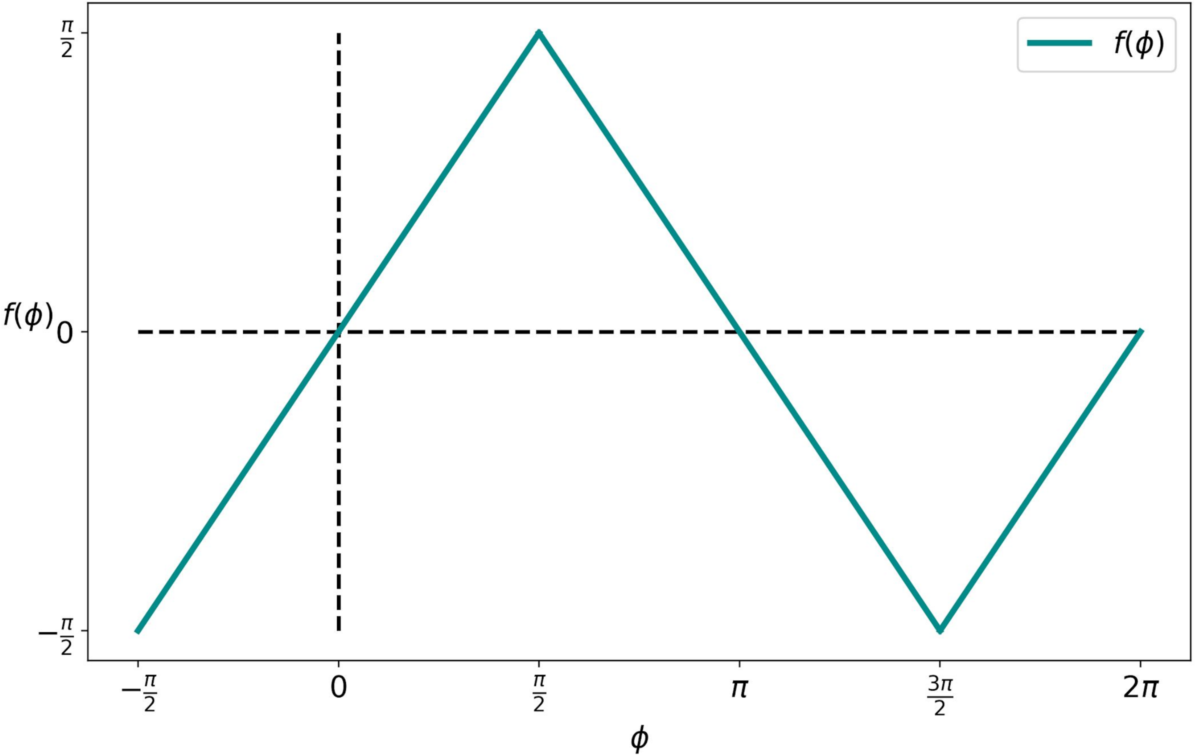
$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases}$$



$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\Theta} &= \Omega \\ \dot{\theta} &= \omega + Af(\Theta - \theta)\end{aligned}}$$

Dibujemos a f

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases}$$



Del experimento al modelo

Observaciones:

(1) Si la diferencia de fase es menor a pi
-> La luciérnaga aumenta velocidad

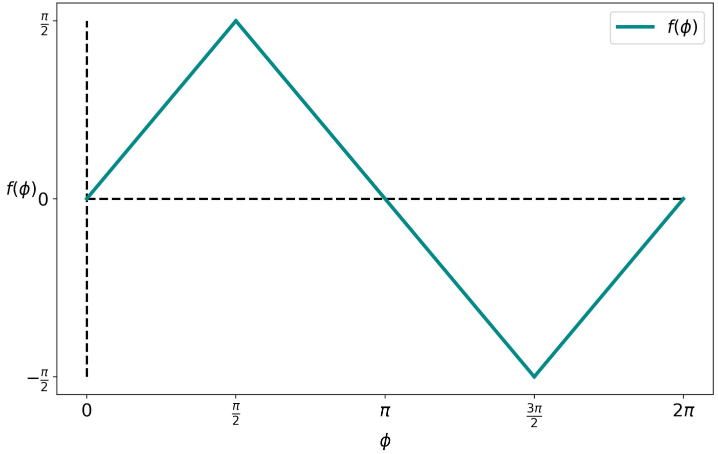
$$\phi = \Theta - \theta$$

(2) Si la diferencia de fase es mayor a pi
-> La luciérnaga baja velocidad

¿Cómo interpretamos los parámetros?

$$\dot{\Theta} = \Omega$$

$$\dot{\theta} = \omega + A f(\Theta - \theta)$$



Del experimento al modelo

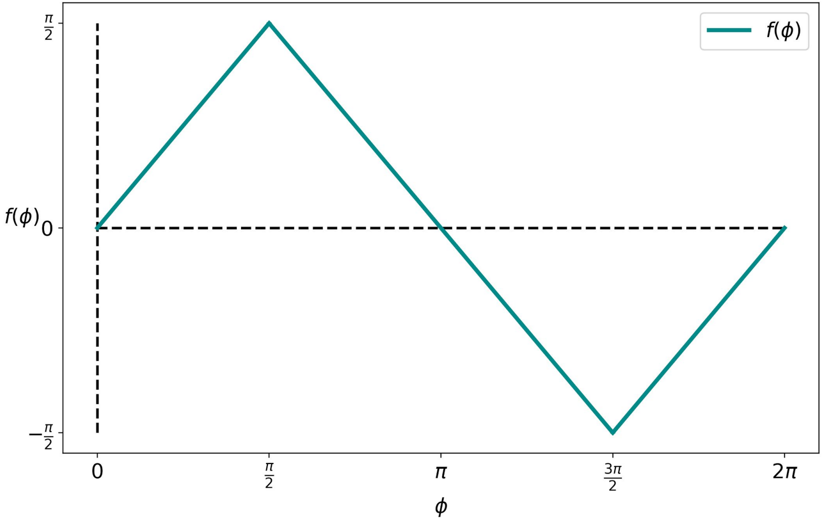
$$\dot{\Theta} = \Omega$$
$$\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta - \theta)$$

Ω Frecuencia de “forzado” ; LED

(parámetro de control!)

ω Frecuencia natural de destello de la luciérnaga

A “Capacidad de reacción” o acople de la luciérnaga



(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

Notemos que podemos ver al sistema como uno forzado:

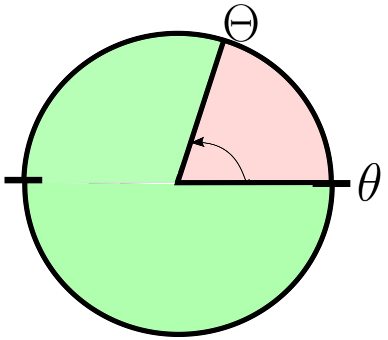
$$\dot{\Theta} = \Omega \Rightarrow \Theta(t) = \Theta_0 + \Omega t$$

$$\dot{\theta} = \omega + Af(\Theta(t) - \theta)$$

Nos vamos a preguntar por la diferencia de fase entre el estímulo y la luciérnaga:

Llegan a un estado de sincronía? (phi = cte)

O no…



(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

La diferencia de fase es un observable!

$$\phi = \Theta - \theta$$

$$\dot{\phi} = \dot{\Theta} - \dot{\theta} = (\Omega - \omega) - Af(\phi)$$

$$\boxed{\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi)}$$

Si bien el sistema dinámico es 2d, la diferencia de fase está regida por uno 1d -> Podemos hacer el análisis “de siempre”

(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi)$$

Veamos los puntos fijos:

$$\dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \Delta\omega - Af(\phi) = 0$$

$$\frac{\Delta\omega}{A} = f(\phi^*)$$

(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

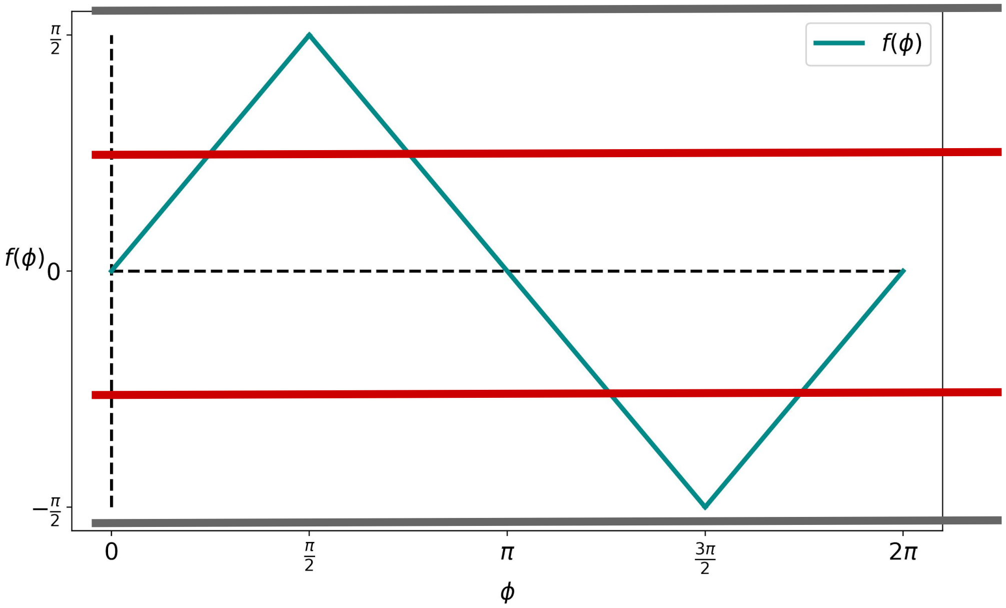
$$\boxed{\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi)}$$

Veamos los puntos fijos:

$$\dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \Delta\omega - Af(\phi) = 0$$

$$\frac{\Delta\omega}{A} = f(\phi^*)$$

Lo analizamos gráficamente: como una intersección de funciones



¿Para qué parámetros la diferencia de fase no da vueltas indefinidamente?

(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

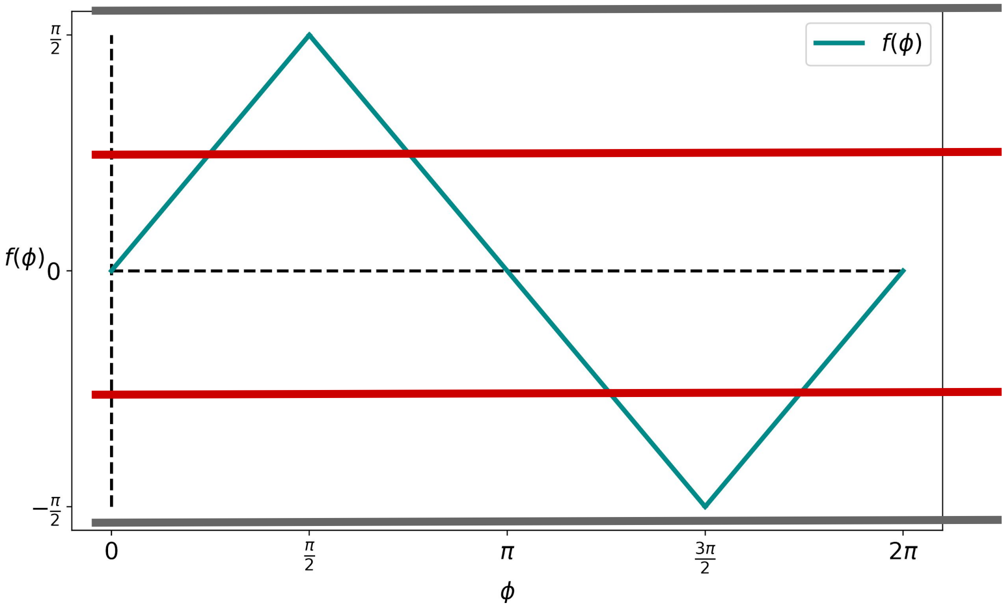
$$\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi)$$

Veamos los puntos fijos:

$$\dot{\phi} = 0 \Leftrightarrow \Delta\omega - Af(\phi) = 0$$

$$\frac{\Delta\omega}{A} = f(\phi^*)$$

Lo analizamos gráficamente: como una intersección de funciones



$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\Delta\omega}{A} \leq \frac{\pi}{2}$$

¿Estabilidad?

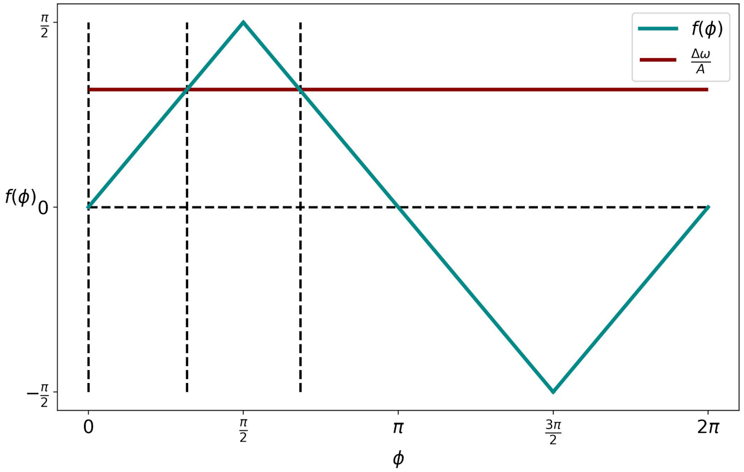
$$\boxed{\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi)}$$

$$-\frac{\pi}{2} \leq \frac{\Delta\omega}{A} \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi) = A[\frac{\Delta\omega}{A} - f(\phi)]$$

$$\frac{\Delta\omega}{A} > f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} > 0$$

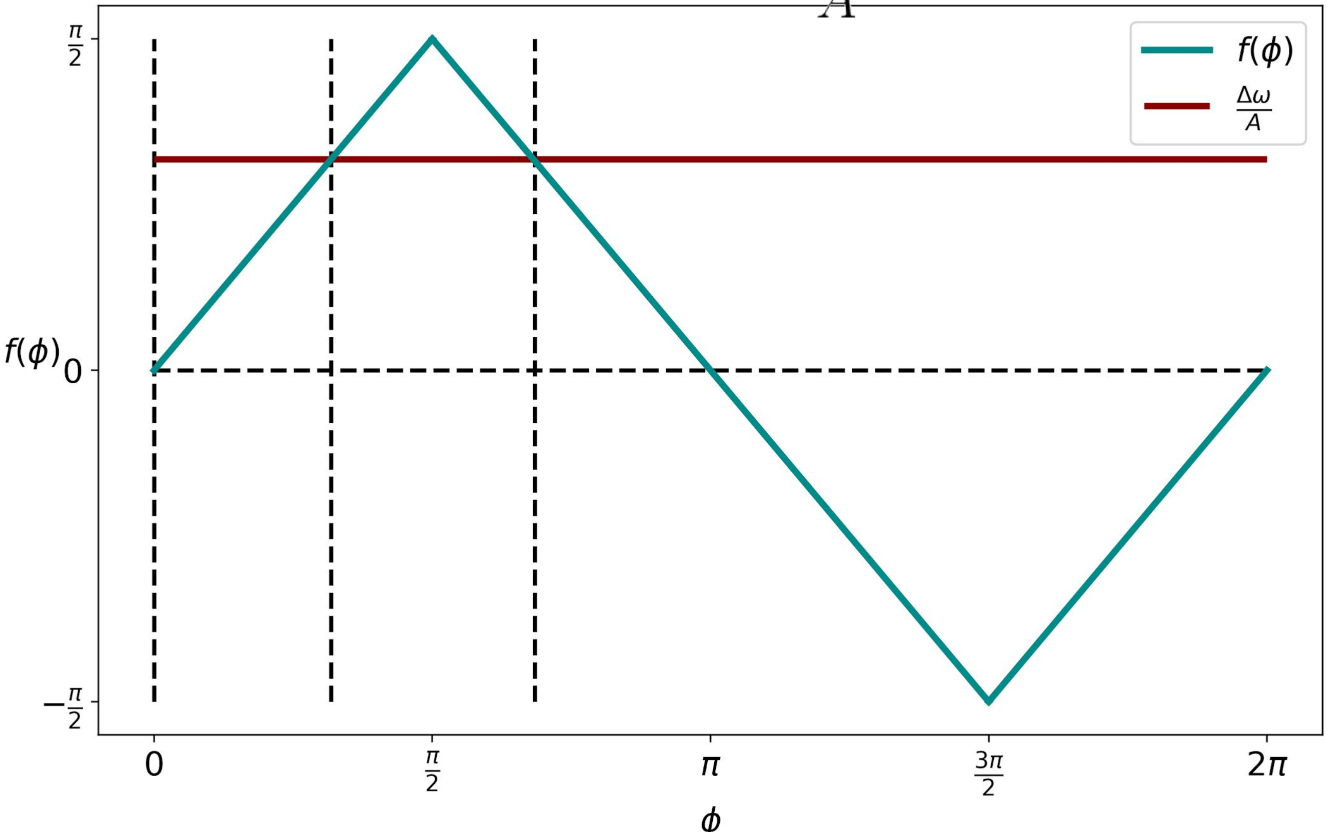
$$\frac{\Delta\omega}{A} < f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} < 0$$



¿Estabilidad?

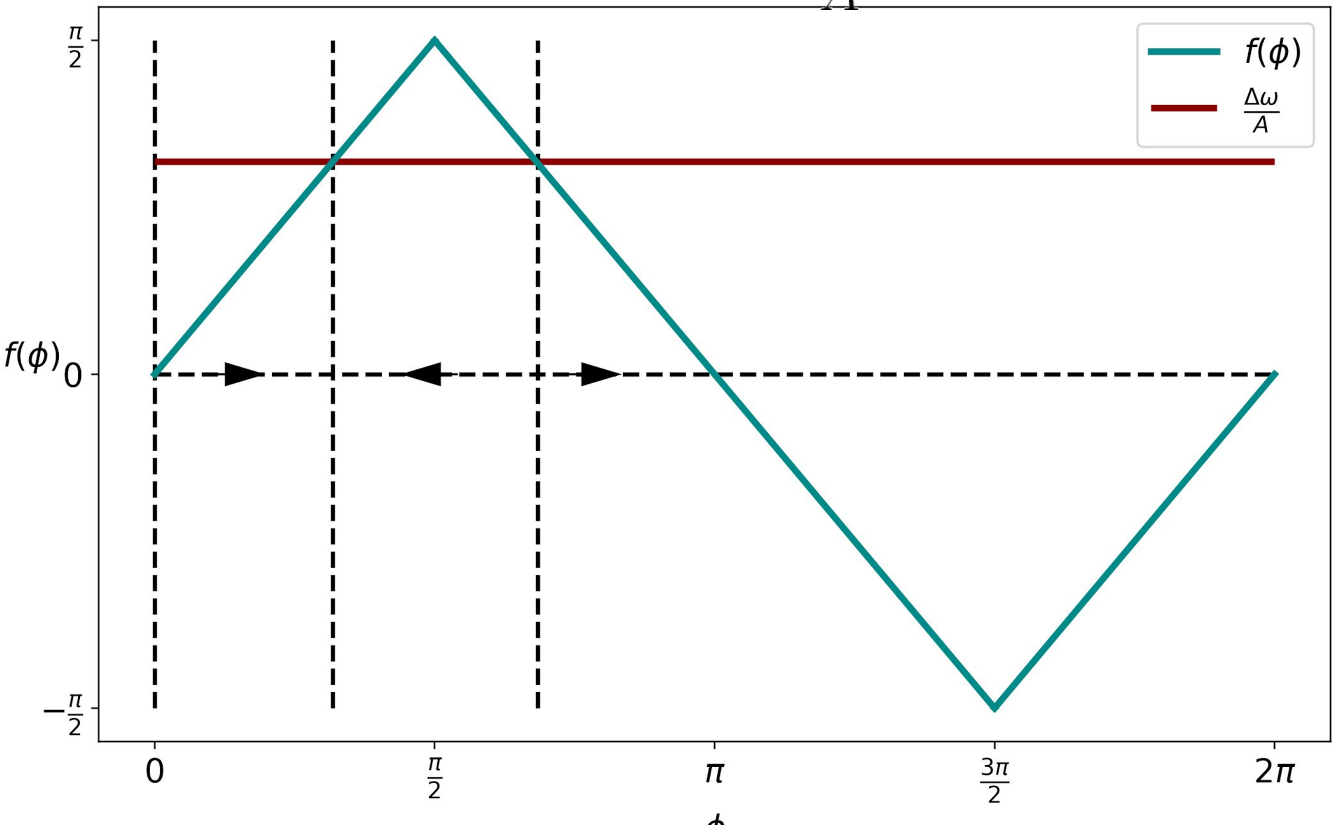
$$\frac{\Delta\omega}{A} > f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} > 0$$

$$\frac{\Delta\omega}{A} < f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} < 0$$



¿Estabilidad?

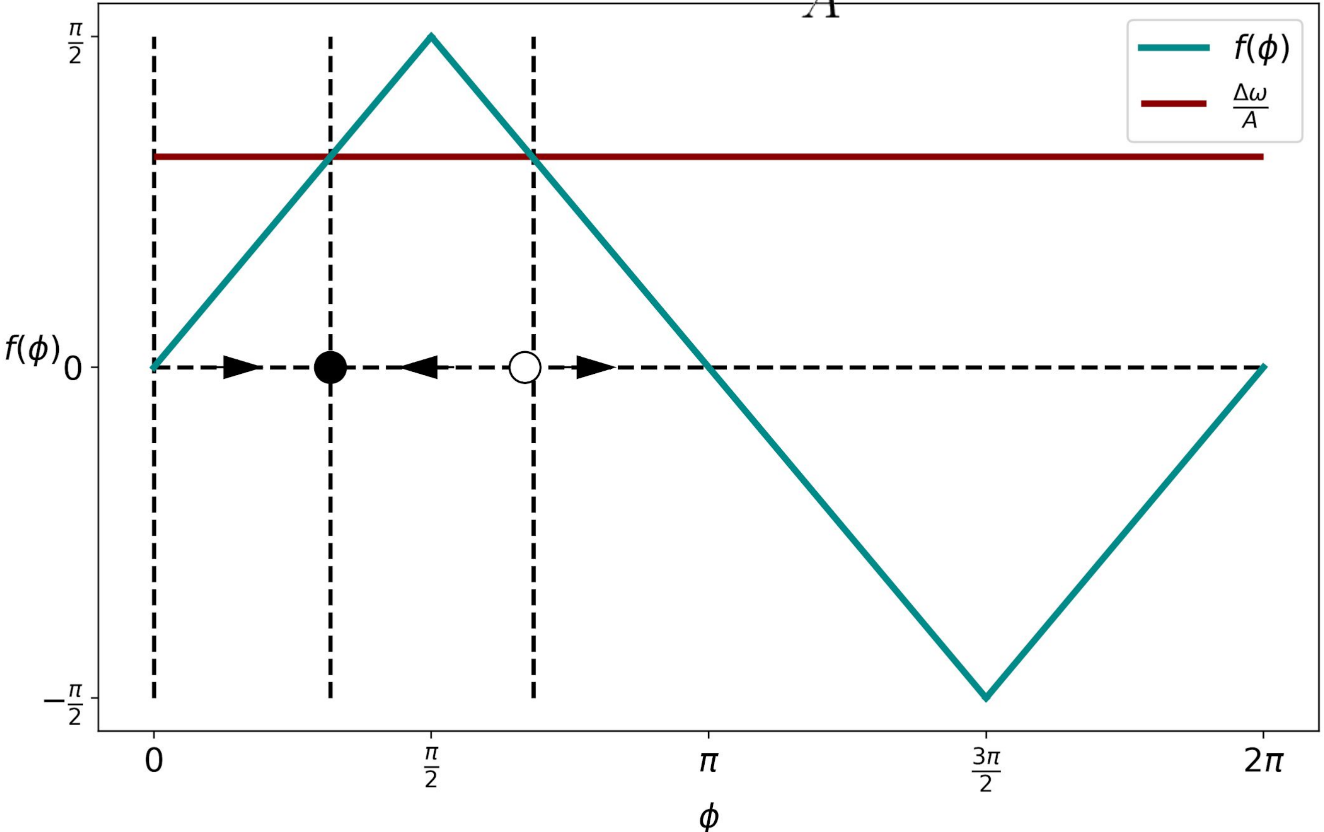
$$\frac{\Delta\omega}{A} > f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} > 0$$
$$\frac{\Delta\omega}{A} < f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} < 0$$

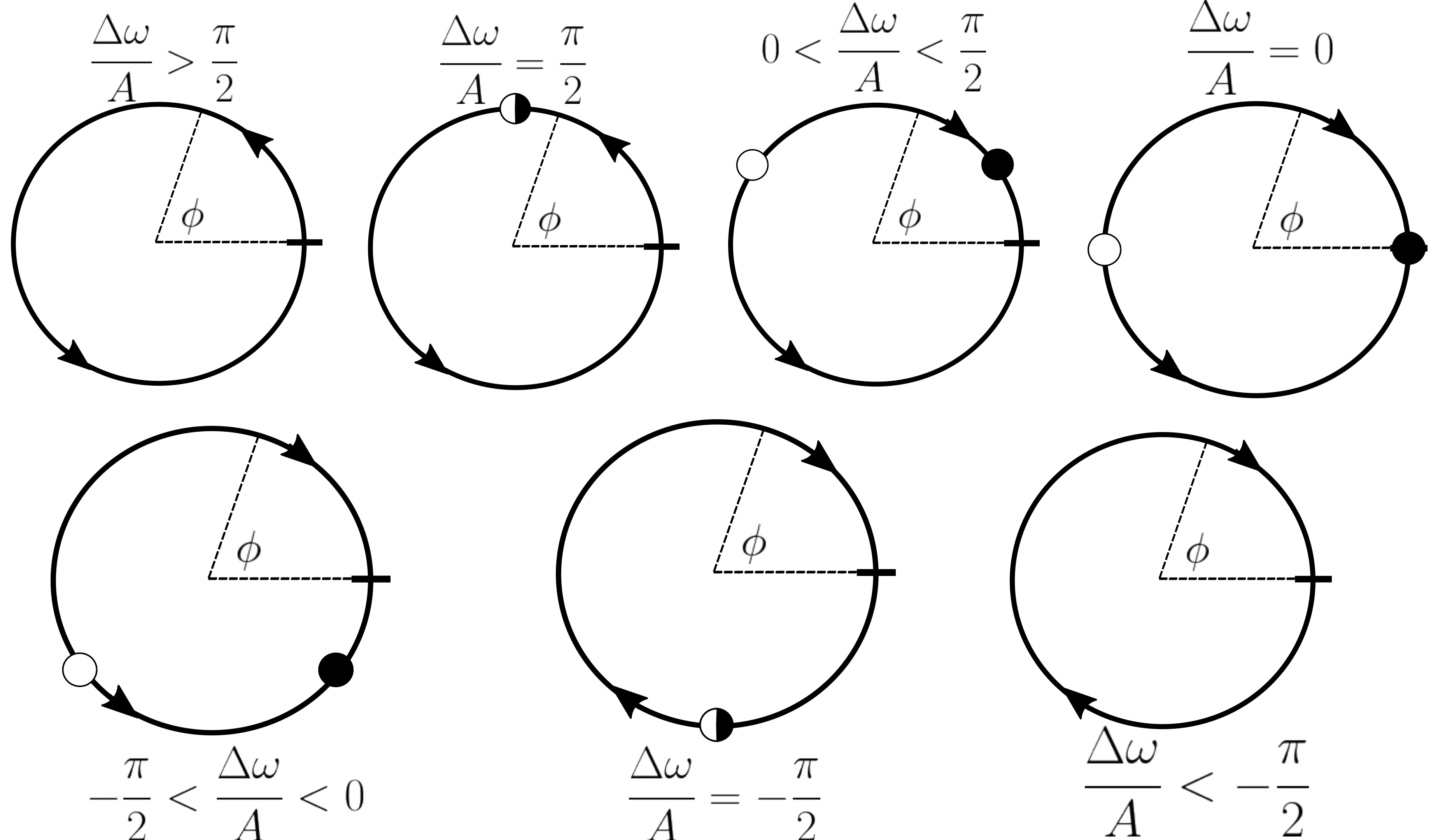


¿Estabilidad?

$$\frac{\Delta\omega}{A} > f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} > 0$$

$$\frac{\Delta\omega}{A} < f(\phi) \Rightarrow \dot{\phi} < 0$$





$\frac{\Delta\omega}{A} > \frac{\pi}{2}$
ϕ
$\frac{\Delta\omega}{A} = \frac{\pi}{2}$
ϕ
$0 < \frac{\Delta\omega}{A} < \frac{\pi}{2}$
ϕ
$\frac{\Delta\omega}{A} = 0$
ϕ
ϕ
$-\frac{\pi}{2} < \frac{\Delta\omega}{A} < 0$
ϕ
$\frac{\Delta\omega}{A} = -\frac{\pi}{2}$
ϕ
$\frac{\Delta\omega}{A} < -\frac{\pi}{2}$

Jugamos con el gif de Agustín

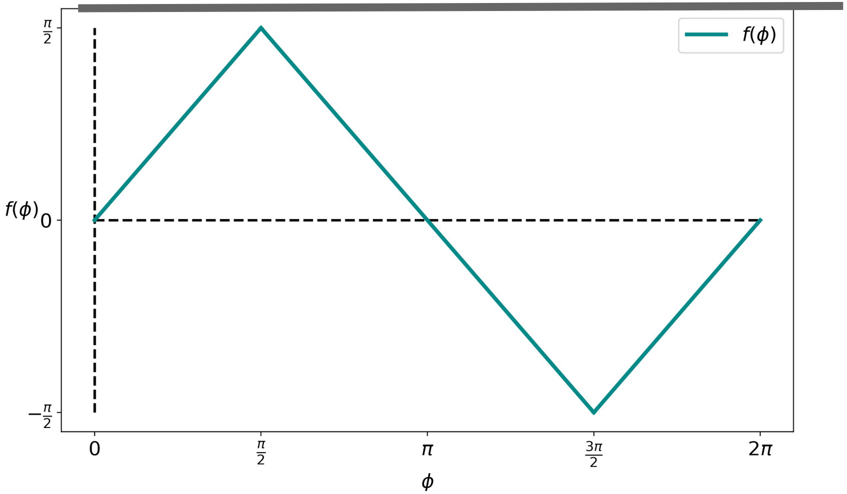
(c) En el caso en que las luciérnagas no están lockeadas al estímulo, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fase en cambiar en 2π:

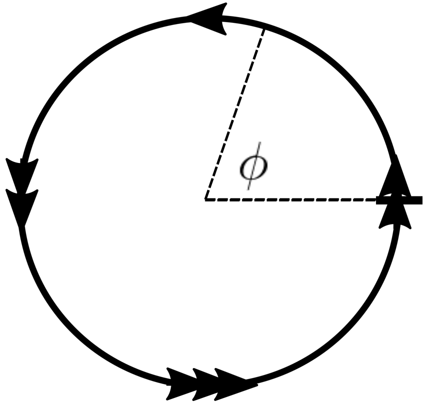
$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}(\phi)}$$

Cuando no tenemos sincronización (no estamos lockeados al estímulo), tenemos "phase drift" o "deriva de fase"

$$\dot{\phi} = \Delta\omega - Af(\phi) = A[\frac{\Delta\omega}{A} - f(\phi)]$$

No recorremos el espacio de fases a velocidad constante!





(c) En el caso en que las luciérnagas no están lockeadas al estímulo, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fase en cambiar en 2π:

$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}(\phi)}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{\Delta\omega - Af(\phi)} d\phi = \frac{1}{A} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\frac{\Delta\omega}{A} - f(\phi)} d\phi$$

$$\frac{1}{A}(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\Delta\omega}{A} - f(\phi)} d\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\Delta\omega}{A} - f(\phi)} d\phi)$$

$$\frac{1}{A}(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\Delta\omega}{A} - \phi} d\phi + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{1}{\frac{\Delta\omega}{A} - \pi + \phi} d\phi)$$

$$\boxed{\frac{2}{A}(ln(\frac{\Delta\omega}{A} + \frac{\pi}{2}) - ln(\frac{\Delta\omega}{A} - \frac{\pi}{2}))}$$

(c) En el caso en que las luciérnagas no están lockeadas al estímulo, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fase en cambiar en 2π:

$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}(\phi)}$$

$$\boxed{\frac{2}{A}\left(ln\left(\frac{\Delta\omega}{A} + \frac{\pi}{2}\right) - ln\left(\frac{\Delta\omega}{A} - \frac{\pi}{2}\right)\right)}$$

A, omega son características de la luciérnaga

Podríamos excitar a distintas frecuencias, dentro del rango de drift, y poner a prueba nuestro modelo con esta curva