Repaso matemática

Dinámica no lineal
Cátedra G. Mindlin
Jueves 30 de Abril 2020

Plan:

- Algebra:
  - Matrices
  - Matriz inversa
  - Determinante y traza
  - Autovalores y autovectores
  - Diagonalización
  - Cambios de base
- Números complejos

Matrices:

Una matriz de m x n es un arreglo de números dispuesto en m filas y n columnas.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & \dots & n \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ m \end{array} & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

Una matriz es **cuadrada** si tiene el mismo número de filas y columnas.

Las matrices se usan para un montón de cosas. Seguramente las usaron para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

Matrices:

Las matrices vienen con una definición usual de suma (de matrices) y de multiplicación (de matrices).

Suma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por un escalar (un número):

$$2\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 10 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrices:

La multiplicación de matrices es más mañosa, hasta que la conocemos:

$$A_{3 \times 3} \cdot B_{3 \times 2} = C_{3 \times 2}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} x \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \\ c_{31} & c_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 5 \\ 12 & 7 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$c_{11} = 3.2 + 2.1 + 1.3 = 11$$

$$c_{21} = 1.2 + 1.1 + 3.3 = 12$$

$$c_{31} = 0.2 + 2.1 + 1.3 = 5$$

$$c_{12} = 3.1 + 2.0 + 1.2 = 5$$

$$c_{22} = 1.1 + 1.0 + 3.2 = 7$$

$$c_{32} = 0.1 + 2.0 + 1.2 = 2$$

Matrices:

Producto de matrices:

- No es conmutativo: AB no necesariamente es BA (puede que lo sea, pero no pasa siempre)
- Es asociativo: ABC = (AB) C = A (BC)

Matrices:

Algunas matrices con nombre:

Identidad

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si la multiplicamos por un vector (una matriz de una columna)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Matriz diagonal

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} av_1 \\ bv_2 \\ cv_3 \end{pmatrix}$$

Matrices:

Se define la **matriz transpuesta** a la que viene de cambiar las filas por las columnas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa:

Dada una matriz M, su matriz inversa es la que al multiplicarla con M da la identidad.

$$MM^{-1} = M^{-1}M = I_d$$

Observaciones:

- Sólo las matrices cuadradas son invertibles
- No todas las matrices cuadradas tienen inversa (¿habrá alguna condición o característica que nos diga si una matriz es invertible?)

Matriz inversa:

Ejemplo 1 (2x2):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad M^{-1} ? \rightsquigarrow M M^{-1} = \mathbb{I}d$$

① Por definición:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ 4a_{11} - a_{21} & 4a_{12} - a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{11} + 2a_{21} = 1 \\ a_{12} + 2a_{22} = 0 \\ 4a_{11} - a_{21} = 0 \\ 4a_{11} - a_{22} = 1 \end{cases}$$

4 ec. lineales con 4 incógnitas

“otra forma”

(2)

$$\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\4&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2-4F_1]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&-9&-4&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2=\frac{F_2}{(-9)}]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&2&1&0\\0&1&\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1-2F_2]{}\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&\frac{1}{9}&\frac{2}{9}\\0&1&\frac{4}{9}&-\frac{1}{9}\end{array}\right)$$

¡ M^{-1} !

Siempre podemos chequear!

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad M^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 \\ 4/9 & -1/9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} + \frac{8}{9} & \frac{2}{9} - \frac{2}{9} \\ \frac{4}{9} - \frac{4}{9} & \frac{8}{9} + \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz inversa:

En 2x2 tenemos una fórmula para la inversa (la vamos a usar un montón).

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

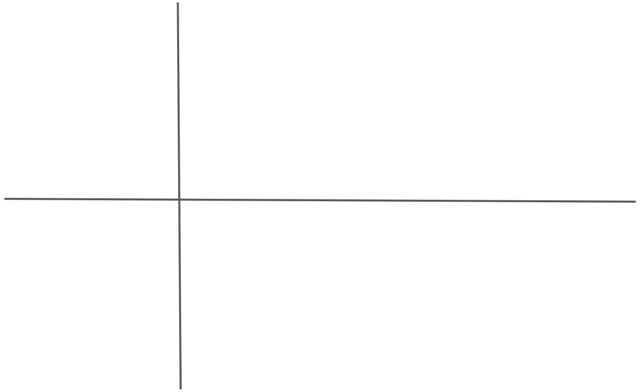
Observaciones:

- Una matriz cuadrada (de cualquier tamaño) es invertible si su **determinante** no es cero. (Si el determinante es nulo, no existe la inversa)
- El sistema Ax=b tiene solución única para cada b sólo si el **determinante** de A no es cero.

Autovalores y autovectores:

- Dada una matriz M, si la multiplico por un vector me da un vector.
- Un autovector es un vector especial. Si multiplico a M por el autovector el resultado es el mismo autovector "estirado" por un factor: el autovalor.

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$



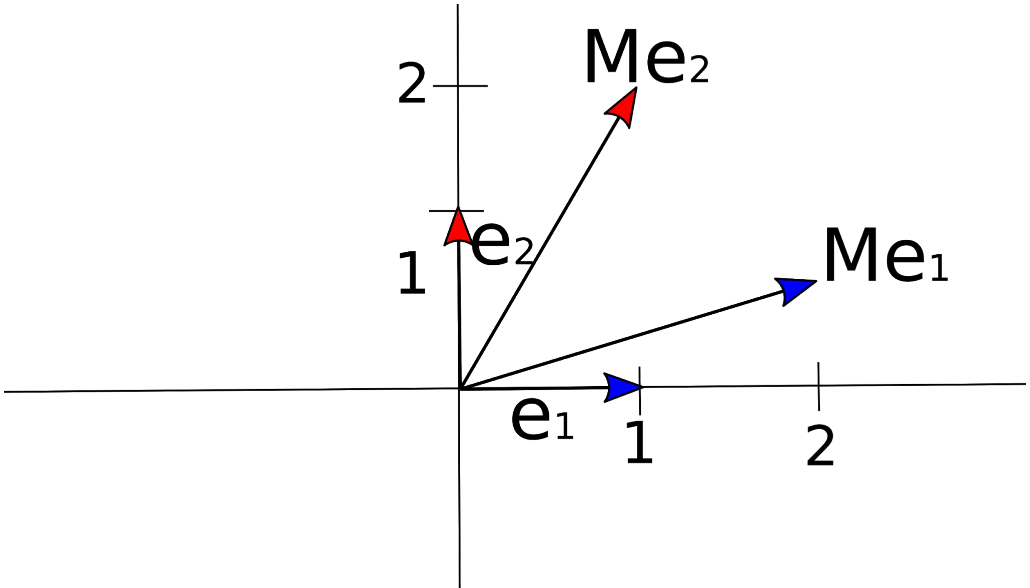
Ejemplo:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Autovectores y autovalores: $M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

“Aplicar” una matriz a un vector tiene un significado geométrico



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

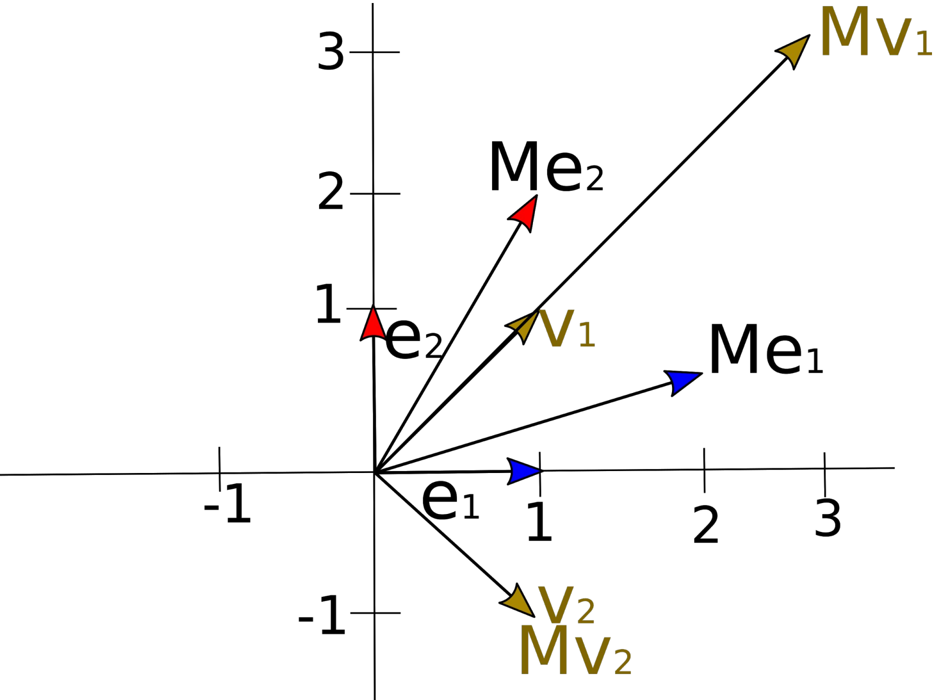
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Autovectores y autovalores:

$$M\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

“Aplicar” una matriz a un vector tiene un significado geométrico



$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Autovectores y autovalores:

¿Cómo encuentro los autovectores y autovalores?

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Buscamos los autovectores (v) y los autovalores (lambda)

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0$$

$$\boxed{(M - \lambda I_d)\mathbf{v} = 0}$$

Notemos que **v**=(0,0) es siempre solución (se la llama solución trivial)

$$A\mathbf{v} = 0$$

Autovectores y autovalores:

¿Cómo encuentro los autovectores y autovalores?

Buscamos los autovectores (v) y los autovalores (lambda)

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

$$M\mathbf{v} - \lambda\mathbf{v} = 0$$

$$\boxed{(M - \lambda I_d)\mathbf{v} = 0}$$

$$A\mathbf{v} = 0$$

Resulta que el sistema ("Av=0) tiene soluciones no triviales (con v que no sean cero) si y sólo si el determinante de A es cero.

Entonces, buscamos los autovalores pidiendo que:

$$\boxed{det(M - \lambda I_d) = 0}$$

Autovectores y autovalores:

$$M\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

¿Cómo encuentro los autovectores y autovalores?

$$\boxed{det(M - \lambda I_d) = 0}$$

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$

$$\lambda_\pm = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2}$$

Como conclusión, nuestros autovalores son 3 y 1.

¿Y como encuentro los autovectores?

$$M\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

Autovectores y autovalores:

¿Cómo encuentro los autovectores y autovalores?

$$det(M - \lambda I_d) = 0$$

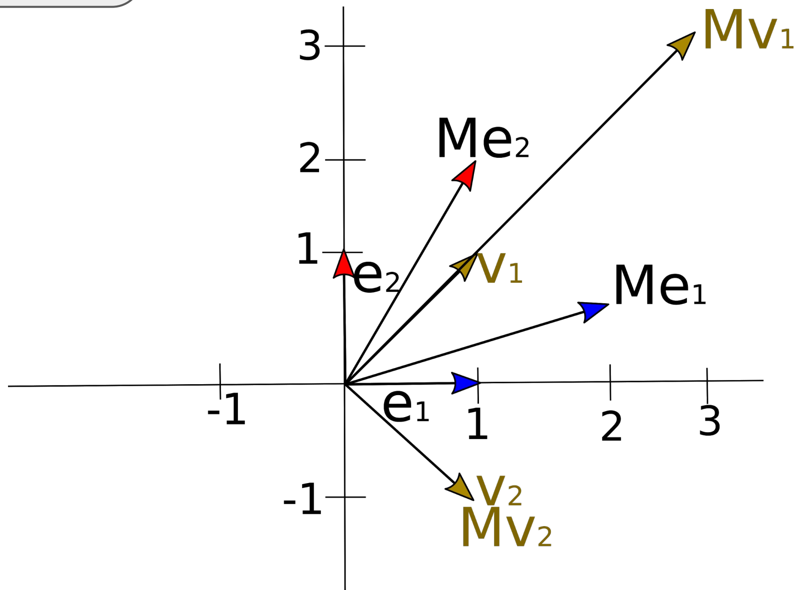
Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$(M - \lambda I_d)\mathbf{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1-0 \\ 1-0 & 2-3 \end{pmatrix} \mathbf{v} = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = 0$$

$$v_x - v_y = 0 \Rightarrow v_x = v_y \Rightarrow \mathbf{v} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

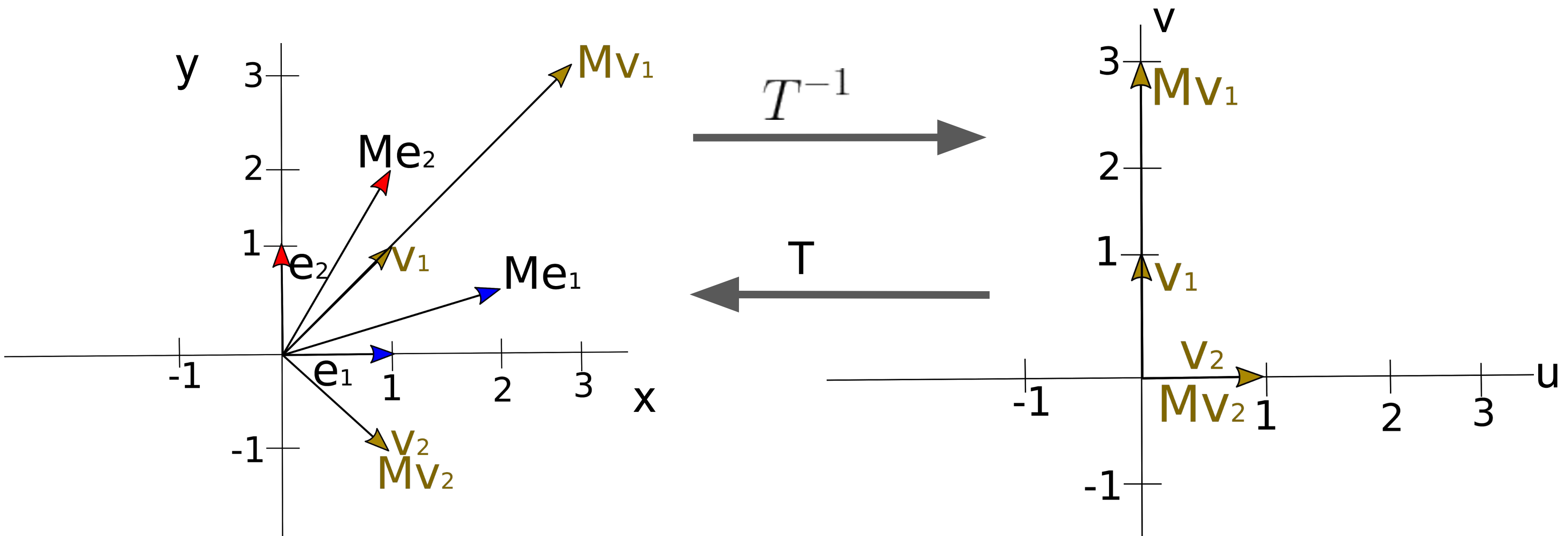


Autovectores y autovalores:

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

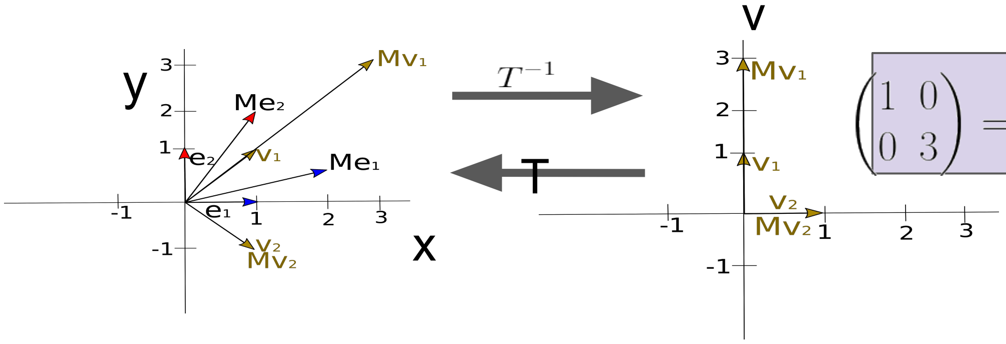
¿Habrá alguna forma de “rotar” mi sistema de coordenadas para que los autovectores esten sobre los ejes?

Cambio de base



Cambio de base:

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$



$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix}}$$

La transformación (o matriz) que me lleva al sistema diagonal (los autovectores son los ejes) es:

"La matriz inversa de la matriz que tiene los autovectores como columnas"

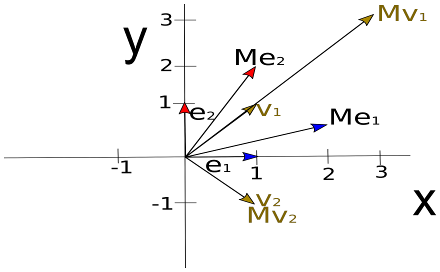
$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

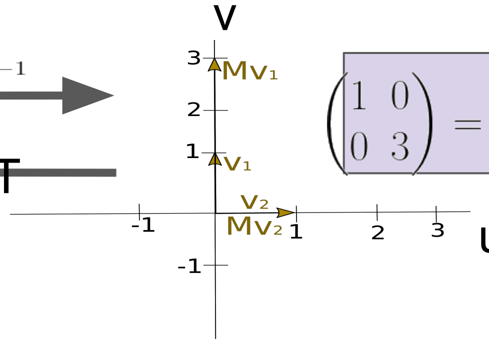
Cambio de base:

Ejemplo: $$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\xrightarrow{T^{-1}}$$

$$\xleftarrow{T}$$



$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix}}$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

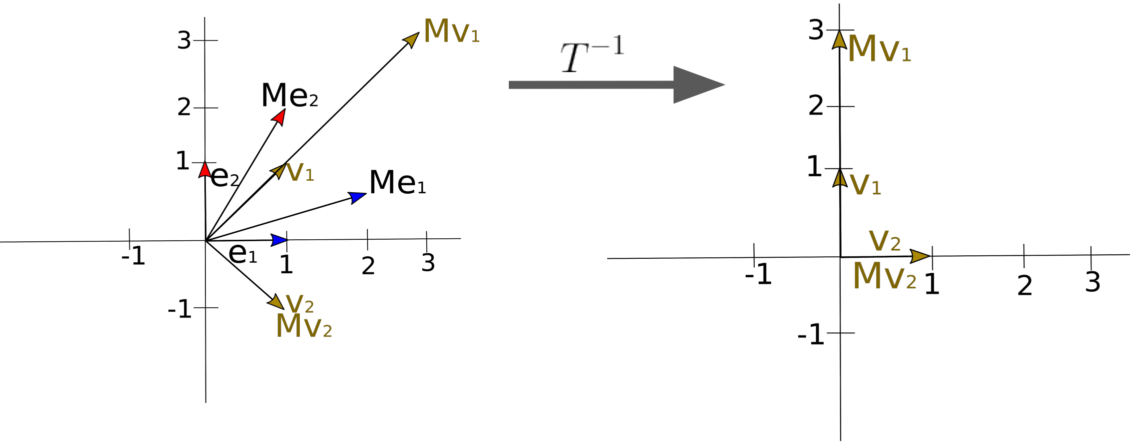
$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

$$T^{-1}\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Cambio de base:



¿Cuál será la matriz B que me lleva el transformado de **w** al transformado de **z**?

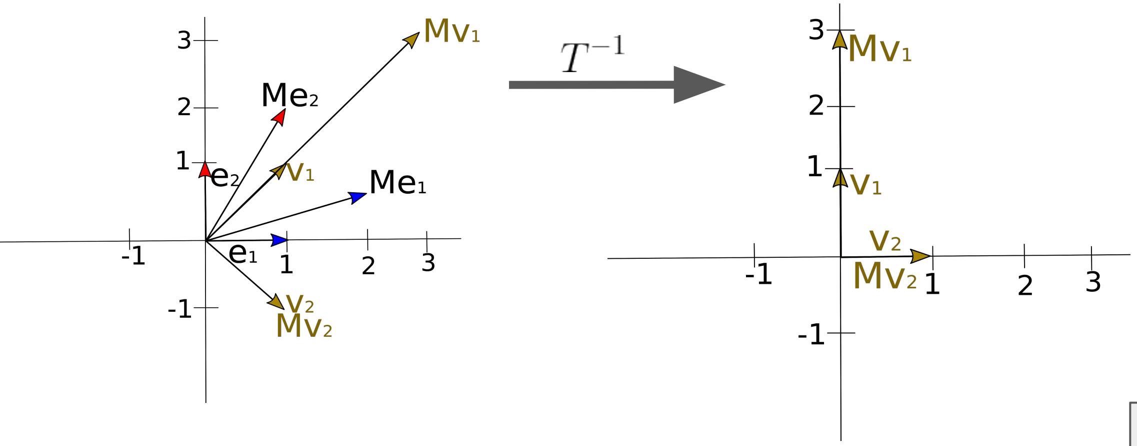
$$M\mathbf{w} = \mathbf{z} \xrightarrow{T^{-1}} B(T^{-1}\mathbf{w}) = T^{-1}\mathbf{z}$$

$$\mathbf{w} \Rightarrow T^{-1}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{z} \Rightarrow T^{-1}\mathbf{z}$$

Cambio de base: $\boxed{B}(T^{-1}\mathbf{w}) = T^{-1}\mathbf{z}$

¿Cuál será la matriz B que me lleva el transformado de **w** al transformado de **z**?



$$M\mathbf{w} = \mathbf{z}$$

$$MTT^{-1}\mathbf{w} = \mathbf{z}$$

$$\boxed{(T^{-1}MT)}(T^{-1}\mathbf{w}) = T^{-1}\mathbf{z}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix}}$$

Autovectores y autovalores:

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

¿Habrá alguna forma de “rotar” mi sistema de coordenadas para que los autovectores esten sobre los ejes?

La receta es:

1. Armá una matriz **T** con los autovectores de columnas
2. Buscá la matriz inversa de **T**
3. Hacé el producto T^-1 MT. Eso te da una matriz diagonal.

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 0.5 & -0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix} \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_a & 0 \\ 0 & \lambda_b \end{pmatrix}}$$

Observaciones finales de autovecs/vals

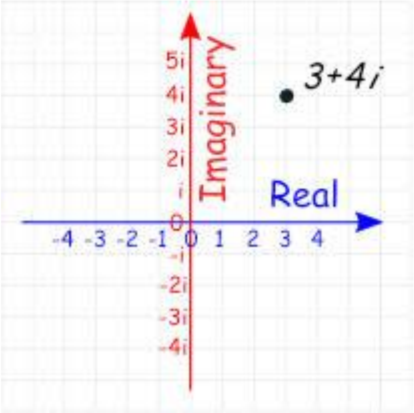
- Los autovalores de una matriz pueden ser complejos.
- Los autovectores de una matriz pueden ser complejos.
- De todos maneras, siempre buscamos los autovalores pidiendo que el determinante de (M- lambda Id) = 0. La ecuación a la que llegamos se llama **polinomio característico**.

Números complejos:

Usualmente se los motiva transmitiendo la inquietud de intentar buscar soluciones para la ecuación:

$$x^2 = -1$$

Dentro de la recta real no hay números que elevados al cuadrado me den algo negativo. Para tener este tipo de números se “agranda” el espacio definiendo un eje imaginario: pasamos al **plano complejo**



$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i \Rightarrow i^4 = 1$$

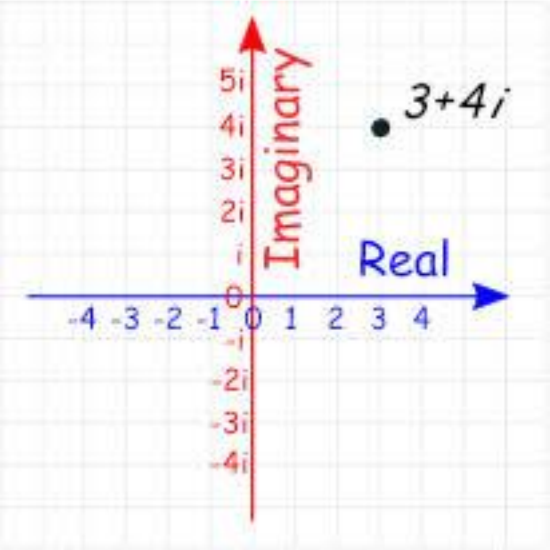
Cualquier número complejo se escribe así:

$$z = a + ib$$

Números complejos:

Para tener este tipo de números se “agranda” el espacio definiendo un eje imaginario: pasamos al **plano complejo**

$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i \Rightarrow i^4 = 1$$



$$z = a + ib$$

$$w = c + id$$

La **suma de números complejos** es así:
Parte real con parte real, parte imaginaria con parte imaginaria

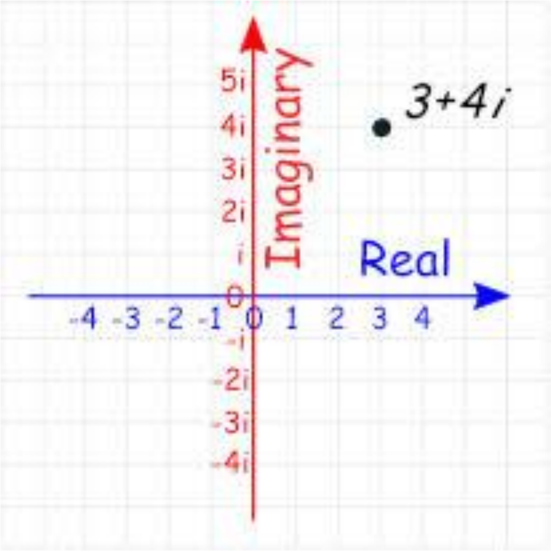
$$z + w = (a + c) + i(b + d)$$

Se puede pensar como suma de vectores

$$z + w = (a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) = (a + c) + i(b + d)$$

Números complejos:

Para tener este tipo de números se “agranda” el espacio definiendo un eje imaginario: pasamos al **plano complejo**



$$i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1 \Rightarrow i^3 = -i \Rightarrow i^4 = 1$$

$$z = a + ib$$

Cuando hacemos el producto hay que tener más cuidado:

$$z^2 = (a + ib)(a + ib) = a^2 + iab + iba + i^2b$$

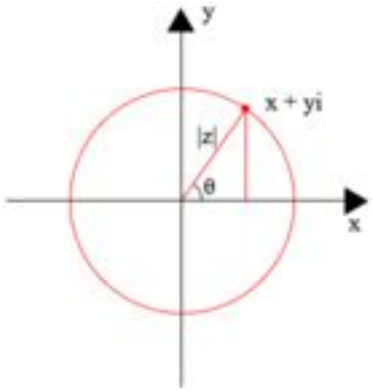
$$z^2 = (a^2 - b^2) + i(2ab)$$

Números complejos:

Para tener este tipo de números se “agranda” el espacio definiendo un eje imaginario: pasamos al **plano complejo**

$$z = a + ib$$

Igual que en el plano, podemos pensar a cada punto como un radio y una fase:



$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta) \qquad (r, \theta) = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \arctan\frac{y}{x}\right).$$

$$z = x + iy = |z|\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = |z|e^{i\theta}$$