Bifurcaciones 1D bis

Dinámica no lineal

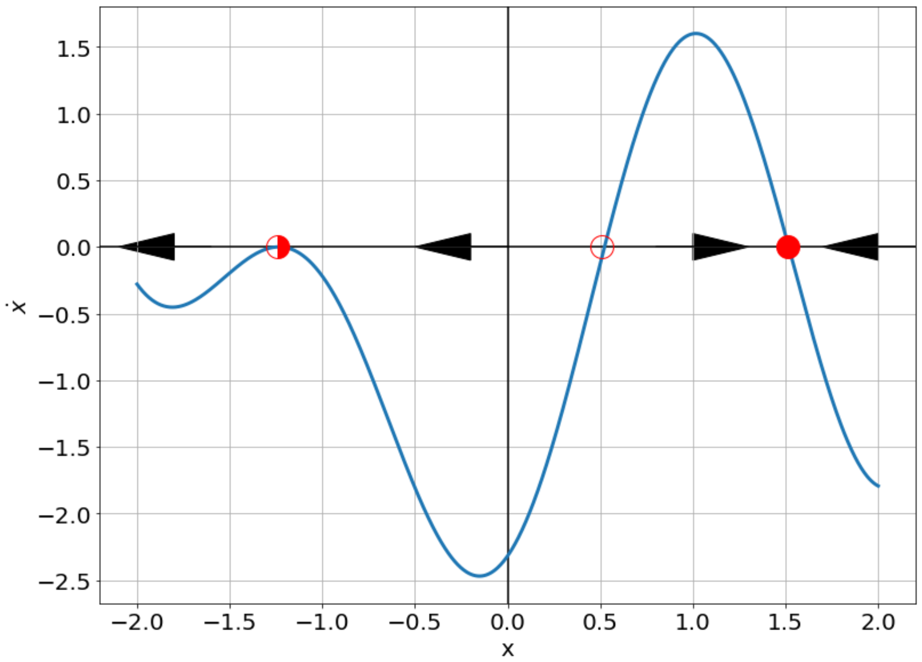
Cátedra G. Mindlin

Miércoles 29 de Abril de 2020


Fig. 2

Bifurcaciones 1D

$$\dot{x} = f(x,r)$$



$$f(x_c, r_c) = 0$$

$$\left.\frac{df}{dx}\right|_{(x_c, r_c)} = 0$$

Sistema de ecuaciones

6. (*) **Switch bioquímico** Las bandas de las cebras y los patrones de las mariposas son dos de los ejemplos más espectaculares de formación de patrones biológicos. Explicar el surgimiento de dichos patrones es un problema abierto en la biología.

Como uno de los ingredientes necesarios para el surgimiento de dichos patrones, Lewis (1979) consideró un ejemplo sencillo de switch bioquímico, donde un gen G se activa por una señal bioquímica S. Por ejemplo, el gen está normalmente desactivado, pero se puede 'prender' para producir un pigmento, u otro producto de los genes cuando la concentración de S excede cierto umbral. Sea $g(t)$ la concentración del producto del gen, y asuma la concentración s_0 de S como constante. El modelo es

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2} \tag{1}$$

donde $k_j > 0$ son constantes de reacción. La producción de g es estimulada por s_0 al ritmo k_1, y por una retroalimentación *auto catalítica* o positiva (los términos no lineales). Hay también un término de degradación controlado por k_2.

J. theor. Biol. (1977) **65**, 579–590

6. (*) **Swit** ... nariposas son dos de los ejemplos ... el surgimiento de dichos patrones ...

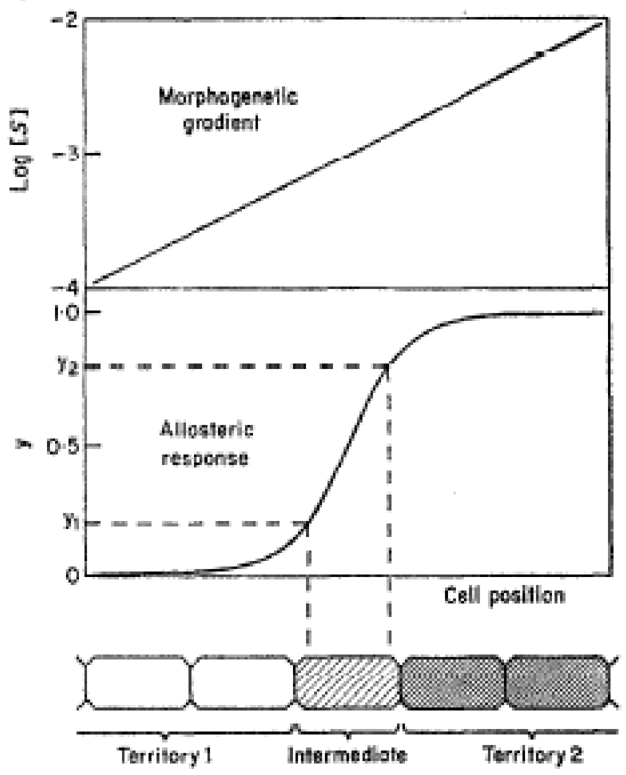
Como un ... s, Lewis (1979) consideró un ejemp... señal bioquímica S. Por ejemplo, ... producir un pigmento, u otro proc... Sea $g(t)$ la concentración del prod... nodelo es

Thresholds in Development

J. Lewis, J. M. W. Slack and L. Wolpert

Department of Biology as Applied to Medicine, The Middlesex Hospital Medical School, London W1P 6DB

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2} \tag{1}$$



Many pattern-forming processes in development may be viewed in terms of a mechanism involving positional information. Two main steps are envisaged: the cells have their position specified with respect to certain boundary regions, and then they interpret this positional information by an appropriate choice of cell state.

"Another difficulty seems to lie in the fact that the gradient . . . must be conceived of as continuous, whereas the series of formations whose differentiation would be determined by that gradient . . . is absolutely discontinuous" (Spemann, 1938).

$$\dot{g} = \underline{k_1 s_0} - \underline{k_2 g} + \underline{\frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}}$$

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}$$

S estimula la transcripción de g $\rightarrow$ $[k_1] = s^{-1}$

$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}$$

S estimula la transcripción de g → $[k_1] = s^{-1}$

g se degrada → $[k_2] = s^{-1}$

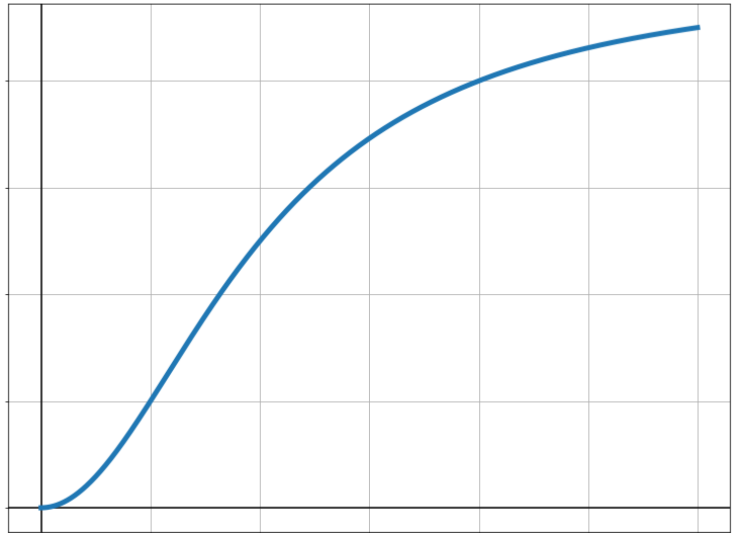
$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}$$

S estimula la transcripción de g → $[k_1] = s^{-1}$

g se degrada → $[k_2] = s^{-1}$

Autocatálisis

$$A + X \rightleftharpoons 2X$$



$$\dot{g} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{k_4^2 + g^2}$$

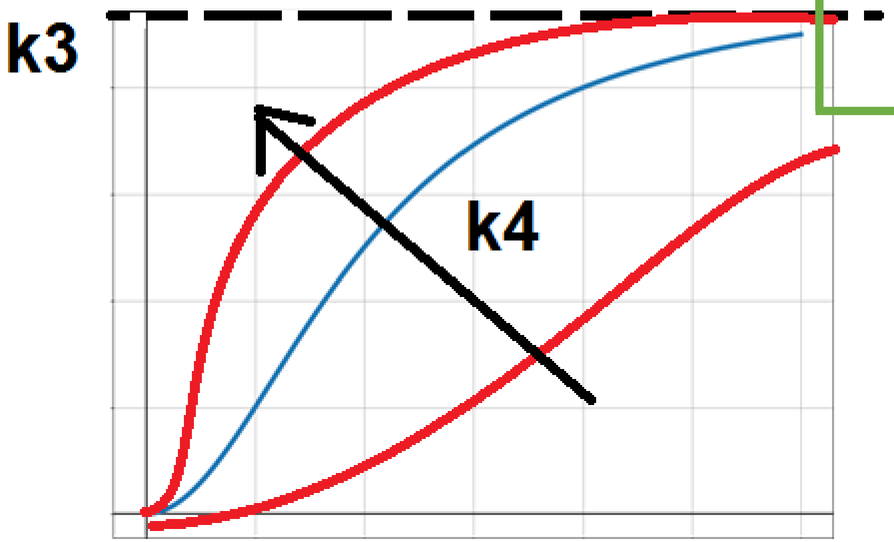
S estimula la transcripción de g → $[k_1] = s^{-1}$

g se degrada → $[k_2] = s^{-1}$

Autocatálisis → $[k_3] = [g]s^{-1}$ → Máxima velocidad

$[k_4] = [g]$

$A + X \rightleftharpoons 2X$



(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \tag{2}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

Adimensionalizar → pasamos de variables con unidades a variables sin unidades

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \tag{2}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

Adimensionalizar → pasamos de variables con unidades a variables sin unidades

$g = \alpha x \longrightarrow$ x: concentración adimensional (en unidades de α)

$t = \gamma\tau \longrightarrow$ τ: tiempo adimensional (en unidades de τ)

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \qquad (2)$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

Adimensionalizar → pasamos de variables con unidades a variables sin unidades

$g = \alpha x$ ⟶ x: concentración adimensional (en unidades de α)

$t = \gamma\tau$ ⟶ τ: tiempo adimensional (en unidades de τ)

Todavía no definimos cuánto valen los parámetros de adimensionalización!

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\frac{d(\alpha x)}{d(\gamma\tau)} = k_1 s_0 - k_2(\alpha x) + \frac{k_3(\alpha x)^2}{{k_4}^2 + (\alpha x)^2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\frac{d(\alpha x)}{d(\gamma\tau)} = k_1 s_0 - k_2(\alpha x) + \frac{k_3(\alpha x)^2}{{k_4}^2 + (\alpha x)^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{\alpha} - k_2 \gamma x + \frac{k_3 \gamma}{\alpha} \frac{x^2}{\frac{k_4^2}{\alpha^2} + x^2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$\frac{d(\alpha x)}{d(\gamma\tau)} = k_1 s_0 - k_2(\alpha x) + \frac{k_3 (\alpha x)^2}{{k_4}^2 + (\alpha x)^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{\alpha} - k_2 \gamma x + \frac{k_3 \gamma}{\alpha} \frac{x^2}{\frac{k_4^2}{\alpha^2} + x^2}$$

$\rightarrow$ Elegimos $\boxed{\alpha = k_4}$ (no es única!)

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$\frac{d(\alpha x)}{d(\gamma\tau)} = k_1 s_0 - k_2(\alpha x) + \frac{k_3(\alpha x)^2}{{k_4}^2 + (\alpha x)^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{\alpha} - k_2\gamma x + \frac{k_3\gamma}{\alpha}\frac{x^2}{\frac{k_4^2}{\alpha^2} + x^2}$$

→ Elegimos $\boxed{\alpha = k_4}$ (no es única!)

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{k_4} - k_2\gamma x + \frac{k_3\gamma}{k_4}\frac{x^2}{1 + x^2}$$

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$\frac{d(\alpha x)}{d(\gamma\tau)} = k_1 s_0 - k_2(\alpha x) + \frac{k_3(\alpha x)^2}{{k_4}^2 + (\alpha x)^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{\alpha} - k_2 \gamma x + \frac{k_3 \gamma}{\alpha} \frac{x^2}{\frac{k_4^2}{\alpha^2} + x^2} \longrightarrow$$

Elegimos $\boxed{\alpha = k_4}$ (no es única!)

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{k_4} - k_2 \gamma x + \frac{k_3 \gamma}{k_4} \frac{x^2}{1 + x^2} \longrightarrow$$

Elegimos $\boxed{\gamma = \frac{k_4}{k_3}}$

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

$$\frac{d(\alpha x)}{d(\gamma\tau)} = k_1 s_0 - k_2(\alpha x) + \frac{k_3 (\alpha x)^2}{{k_4}^2 + (\alpha x)^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{\alpha} - k_2 \gamma x + \frac{k_3 \gamma}{\alpha} \frac{x^2}{\frac{k_4^2}{\alpha^2} + x^2}$$

Elegimos $\boxed{\alpha = k_4}$ (no es única!)

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{\gamma k_1 s_0}{k_4} - k_2 \gamma x + \frac{k_3 \gamma}{k_4} \frac{x^2}{1 + x^2}$$

Elegimos $\boxed{\gamma = \frac{k_4}{k_3}}$

$$\boxed{\frac{dx}{d\tau} = \frac{k_1 s_0}{k_3} - \frac{k_2 k_4}{k_3} x + \frac{x^2}{1 + x^2}}$$

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \tag{2}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{k_1 s_0}{k_3} - \frac{k_2 k_4}{k_3} x + \frac{x^2}{1+x^2}$$

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2} \tag{2}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{k_1 s_0}{k_3} - \frac{k_2 k_4}{k_3} x + \frac{x^2}{1 + x^2} \longrightarrow s = \frac{k_1 s_0}{k_3} \qquad r = \frac{k_2}{k_3/k_4}$$

(a) Muestre que el problema se puede llevar a la ecuación adimensional

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \tag{2}$$

donde $r > 0$ y $s \geq 0$ son adimensionales.

$$\frac{dg}{dt} = k_1 s_0 - k_2 g + \frac{k_3 g^2}{{k_4}^2 + g^2}$$

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \longleftrightarrow s = \frac{k_1 s_0}{k_3} \qquad r = \frac{k_2}{k_3/k_4}$$

r "grande" → degradación >> autocatálisis

Degradación/autocatálisis

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = 0 = -rx + \frac{x^2}{1 + x^2}$$

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = 0 = -rx + \frac{x^2}{1+x^2} = x\left(-r + \frac{x}{1+x^2}\right)$$

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = 0 = -rx + \frac{x^2}{1+x^2} = x\left(-r + \frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$\longrightarrow x^* = 0$$

$$\longrightarrow -r + \frac{x^*}{1+{x^*}^2} = 0$$

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = 0 = -rx + \frac{x^2}{1+x^2} = x\left(-r + \frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$\longrightarrow \quad x^* = 0$$

$$\longrightarrow \quad -r + \frac{x^*}{1+{x^*}^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r^2}}{2r}$$

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = 0 = -rx + \frac{x^2}{1+x^2} = x\left(-r + \frac{x}{1+x^2}\right)$$

$$\longrightarrow x^* = 0$$

$$\longrightarrow -r + \frac{x^*}{1+{x^*}^2} = 0 \longrightarrow x^* = \frac{1 \pm \sqrt{1-4r^2}}{2r}$$

¿Bifurcación?

$$x_c = \frac{1 \pm \sqrt{0}}{2r_c} = 1$$

1-4r^2>0 2pf

rc=1/2

1-4r^2<0 0pf

$x_c = 1$

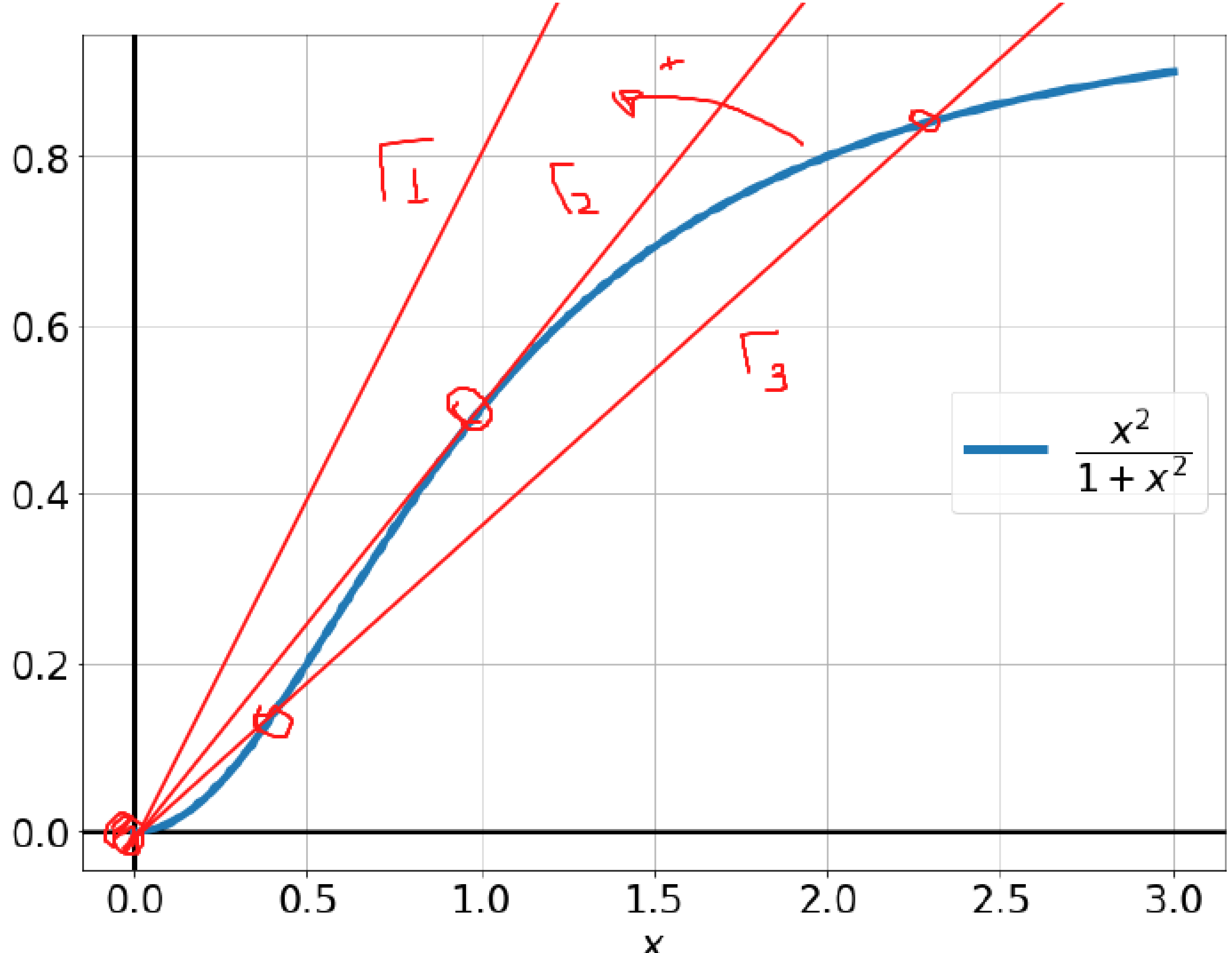
SN

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = -rx + \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \rightarrow rx = \frac{x^2}{1+x^2}$$

(b) Muestre que si $s = 0$, hay dos puntos fijos positivos x^* si $r < r_c$, donde r_c debe ser determinado.

$$\dot{x} = -rx + \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \rightarrow rx = \frac{x^2}{1+x^2}$$



(c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se 'prende'): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se *apaga* nuevamente?

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2}$$

(c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se 'prende'): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se *apaga* nuevamente?

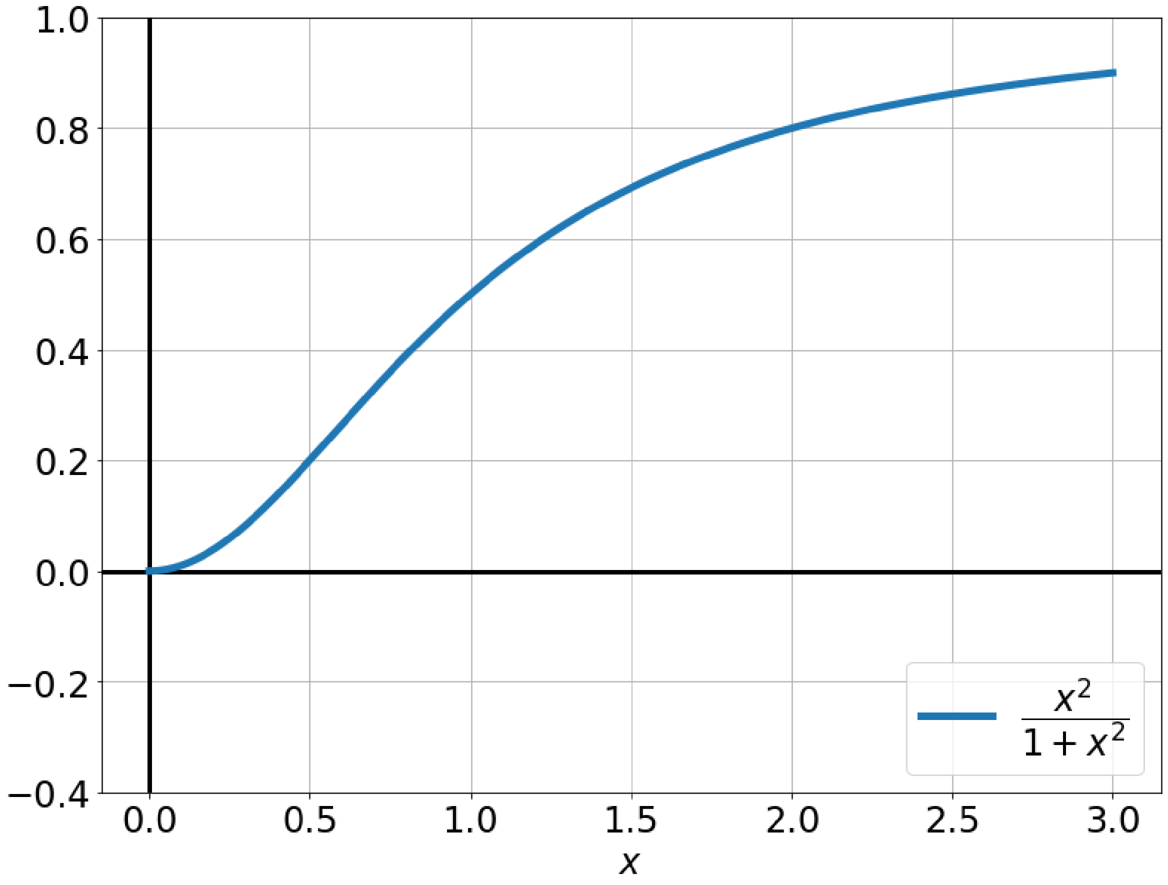
$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1 + x^2} = 0$$

(c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se 'prende'): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se *apaga* nuevamente?

$$\frac{dx}{d\tau} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} = 0 \rightarrow rx - s = \frac{x^2}{1+x^2}$$

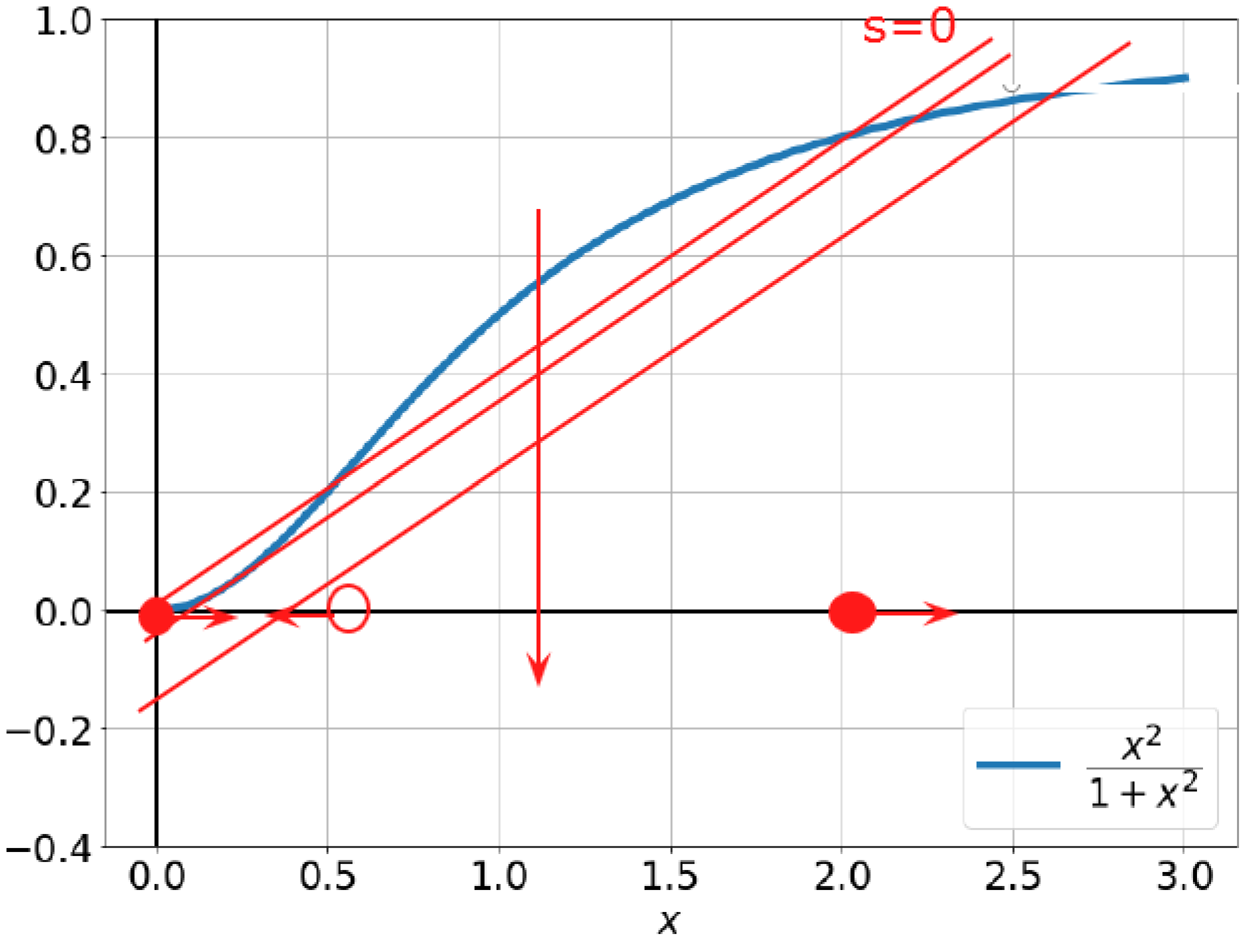
(c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se 'prende'): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se *apaga* nuevamente?

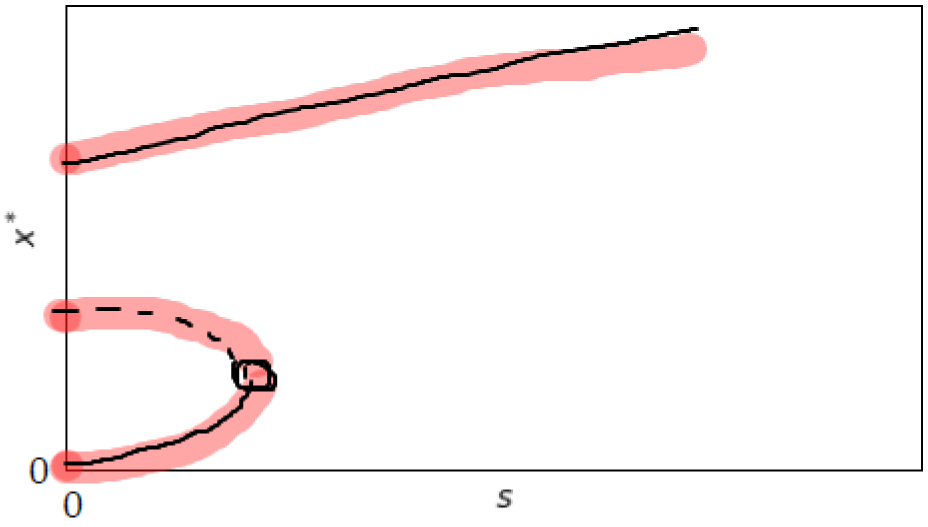
$$rx - s = \frac{x^2}{1+x^2}$$

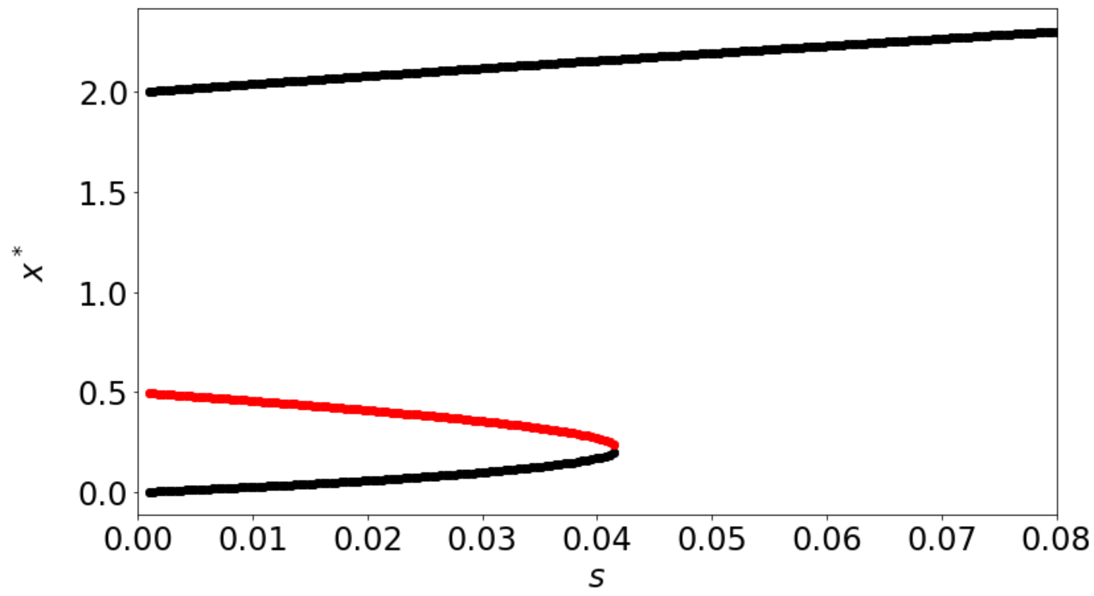


(c) Asuma que inicialmente no hay ningún producto en la reacción $g(0) = 0$, y suponga que s aumenta lentamente desde 0 (la señal activadora se 'prende'): ¿qué pasa con $g(t)$? ¿Qué pasa si s vuelve a caer a cero? ¿El producto se *apaga* nuevamente?

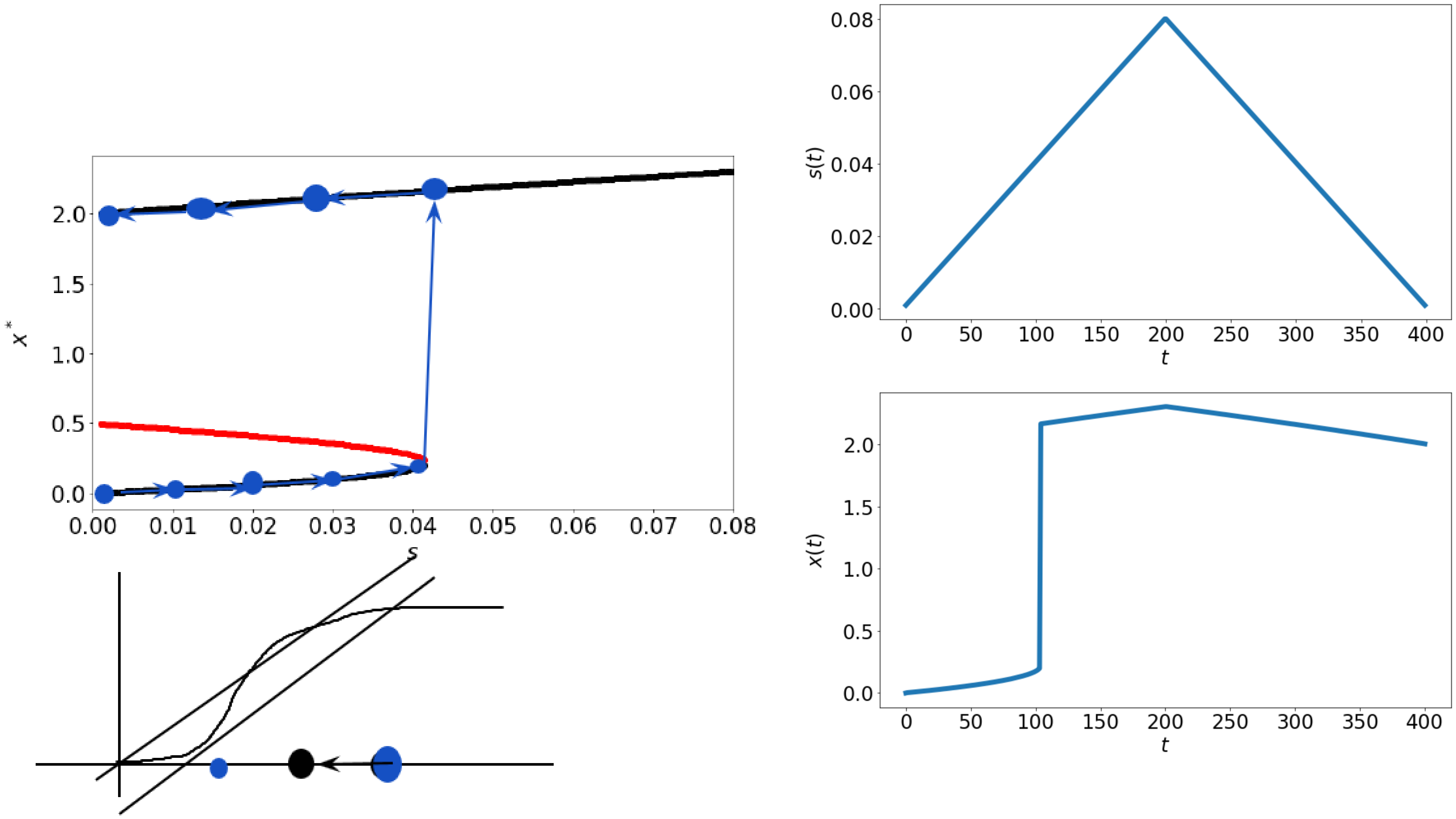
$$rx - s = \frac{x^2}{1+x^2}$$







2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
x^*
0.00
0.01
0.02
0.03
0.04
0.05
0.06
0.07
0.08
s



x^*
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0.00 0.01 0.02 0.03 0.04 0.05 0.06 0.07 0.08
s
$s(t)$
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0 50 100 150 200 250 300 350 400
t
$x(t)$
2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
0 50 100 150 200 250 300 350 400
t

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\dot{x} = 0 \rightarrow s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = 0 \rightarrow -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0$$

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \rightarrow s - rx + \dfrac{x^2}{1+x^2} = 0 \\ \\ \dfrac{d\dot{x}}{dx} = 0 \rightarrow -r + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \end{array}\right]$$

¿Cómo van a ser las soluciones / cuántas hay?

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\dot{x} = 0 \rightarrow s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} = 0$$

$$\frac{d\dot{x}}{dx} = 0 \rightarrow -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \longrightarrow r(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \to \frac{d\dot{x}}{dx} = -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \to s - rx + \dfrac{x^2}{1+x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{d\dot{x}}{dx} = 0 \to -r + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \end{array}\right] \to r(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$s = rx - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}x - \frac{x^2}{1+x^2}$$

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \to \frac{d\dot{x}}{dx} = -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \to s - rx + \dfrac{x^2}{1+x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{d\dot{x}}{dx} = 0 \to -r + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \end{array}\right] \to r(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$s = rx - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}x - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$s(x) = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$\dot{x} = s - rx + \frac{x^2}{1+x^2} \rightarrow \frac{d\dot{x}}{dx} = -r + \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

$$\left[\begin{array}{l} \dot{x} = 0 \rightarrow s - rx + \dfrac{x^2}{1+x^2} = 0 \\[2ex] \dfrac{d\dot{x}}{dx} = 0 \rightarrow -r + \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} = 0 \end{array}\right]$$

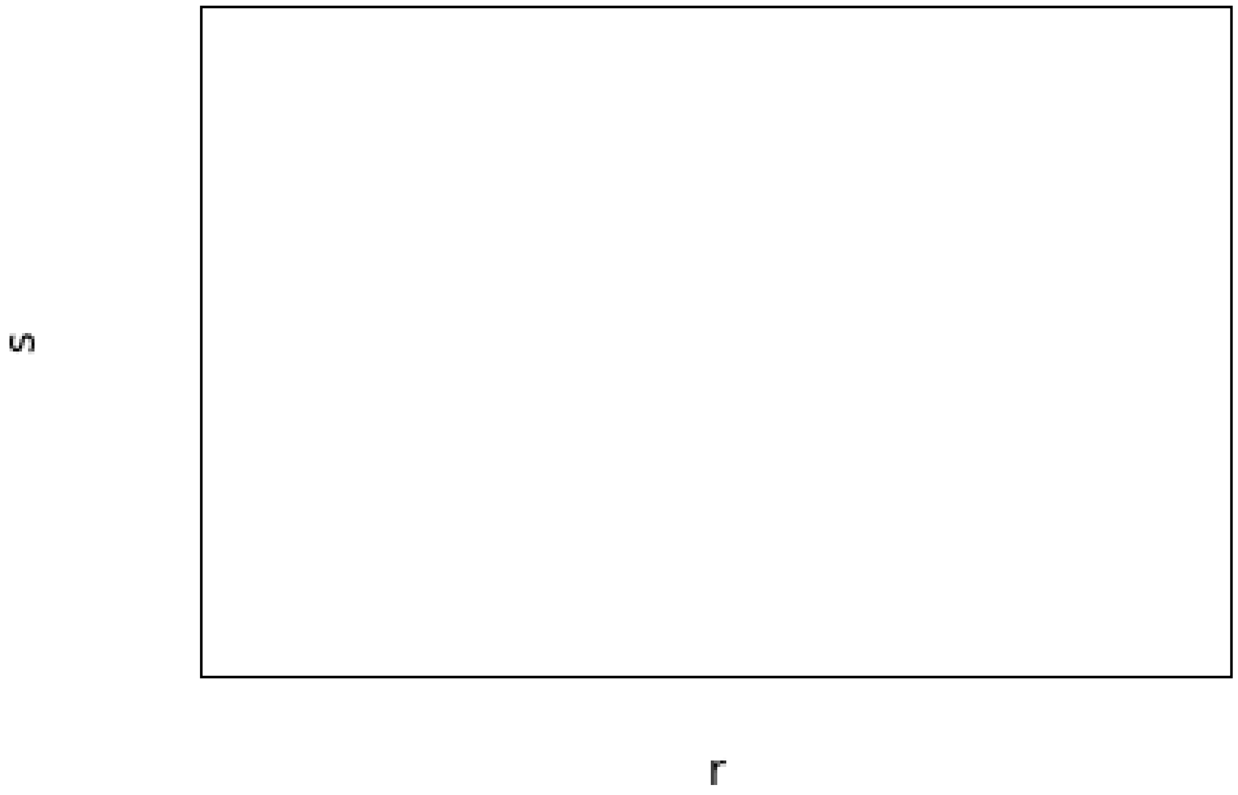
$$\boxed{r(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}}$$

$$s = rx - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}x - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2x^2 - x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$\boxed{s(x) = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}}$$

(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$s(x) = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \qquad r(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$



(d) Encuentre ecuaciones paramétricas para las curvas de bifurcación en el espacio (r, s) y clasifique las bifurcaciones que ocurren.

$$s(x) = \frac{x^2(1-x^2)}{(1+x^2)^2} \qquad r(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2}$$

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

x = np.linspace(0, 10, 10000)
r = 2*x/(1+x**2)**2
s = x**2*(1-x**2)/(1+x**2)**2
plt.plot(r, s, lw=3)
plt.xlim(0, 0.7)
plt.ylim(0, 0.15)
plt.xlabel('r')
plt.ylabel('s')
```