DNL/MCA 2020
Práctica 06/05/2020
Cátedra Mindlin

Orador hoy: Santiago Boari

Flujos 2D – Caso lineal

Como vieron en teórica, el caso lineal es super importante:

***Roadmap a "trazo grueso"*:**

- Estudiaremos el comportamiento de un sistema no-lineal buscando puntos fijos y *linealizando* el campo en un entorno de cada punto fijo.

- Si se **cumplen condiciones** para que la parte lineal provea información del comportamiento del sistema NL y el sistema es lo *suficientemente suave*, por continuidad del flujo podremos hacer un *retrato de fases* completo.

- También haremos ***integraciones numéricas*** de los sistemas NL sin necesidad de linealizar en un entorno del punto fijo.

Flujos 2D – Caso lineal

Cualquier sistema *lineal* en 2D puede escribirse como:

$$\dot{x} = ax + by$$
$$\dot{y} = cx + dy$$

- o, en forma matricial (negrita representa vector):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\boldsymbol{x}$$

- Donde A es la matriz *de coeficientes* del sistema, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Flujos 2D – Caso lineal

- $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$. Queremos encontrar soluciones del tipo $\boldsymbol{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{v}$.
- Es decir, $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}$ tales que $A\boldsymbol{v_1} = \lambda_1\boldsymbol{v_1}$ y $A\boldsymbol{v_2} = \lambda_2\boldsymbol{v_2}$.
- Esto significa encontrar los **autovalores** λ y **autovectores** $\boldsymbol{v}$ de este sistema.
- Para esto, tenemos que resolver la ecuación $(A - \lambda I)\boldsymbol{x} = 0$, con *I* la identidad en $\mathbb{R}^{2x2}$.
- Solución no trivial **sólo cuando $\mathbf{det}(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})$=0**.

- $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc$

$$\det(A - \lambda I) \ = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = P(\lambda)$$

- $P(\lambda)$ es el *polinomio característico* del sistema. Buscamos sus raíces.

Flujos 2D – Caso lineal

$$P(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Pero antes, notemos que:

- $\tau = (a+d)$ es la *traza* de la matriz *A*
- $\Delta = (ad - bc)$ es el *determinante* de la matriz *A*

- Entonces, tenemos que resolver $\lambda^2 - \tau\lambda + \Delta = 0$, cuyas raíces son

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Nota: τ y Δ *no dependen* de la base en la que esté escrita la matriz A. Si A estuviera en su base diagonal, $\tau = (a+d) = \lambda_1 + \lambda_2$ y $\Delta = (ad - bc) = \lambda_1 \lambda_2$

Flujos 2D – Caso lineal

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

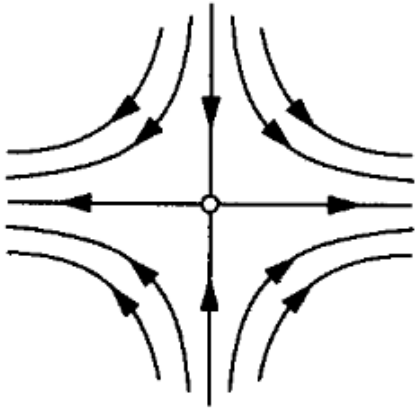
- Tendremos **distintos** casos posibles dependiendo de la relación entre τ y Δ. La **solución general** se escribe en término de los autovectores y autovalores como:

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \boldsymbol{v_1} e^{\lambda_1 t} + C_2 \boldsymbol{v_2} e^{\lambda_2 t}$$

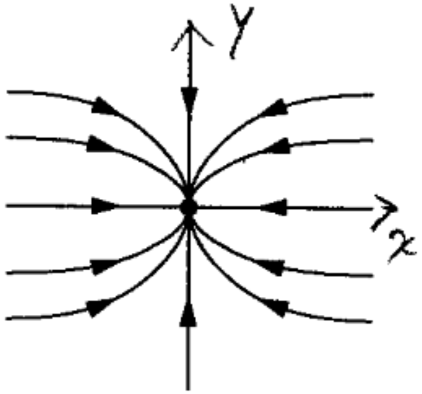
Flujos 2D – Caso lineal

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

- Si $\Delta < 0$, el radicando será siempre positivo y la raíz siempre mayor a τ, por lo cual λ_1, λ_2 serán **números reales, pero de signos opuestos**. *Punto saddle.*



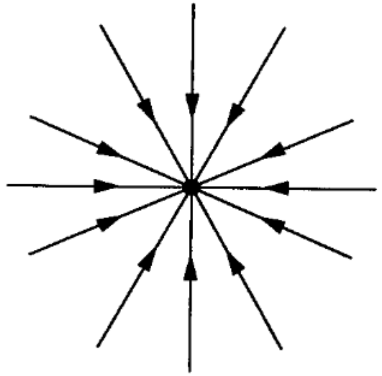
- Si $\Delta > 0$
  - Si $\tau^2 - 4\Delta$ >0, obtendremos autovalores *reales,* **pero *del mismo signo***. Es decir, el signo de τ determina el signo de los autovalores λ_1 y λ_2.
    - Si $\tau > 0$ los autovalores λ_1 y λ_2 serán **ambos reales y positivos**.
    - Si $\tau < 0$ los autovalores λ_1 y λ_2 serán **ambos reales y negativos**.



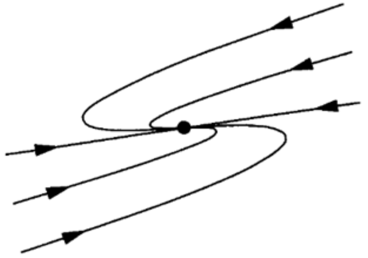
Flujos 2D – Caso lineal

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

- Si $\Delta > 0$
  - Si $\tau^2 - 4\Delta = 0$, $\lambda_{1,2} = \frac{\tau}{2}$. Un único autovalor. Ante esta situación, puede que existan dos autovectores o sólo uno.
  - Ejemplos:
    - $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Todo vector es autovector. **Nodo estrella**.



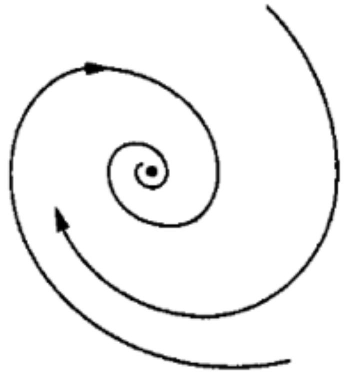
    - $\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, con\ b \neq 0$. Existe un único autovector. **Nodo degenerado.**



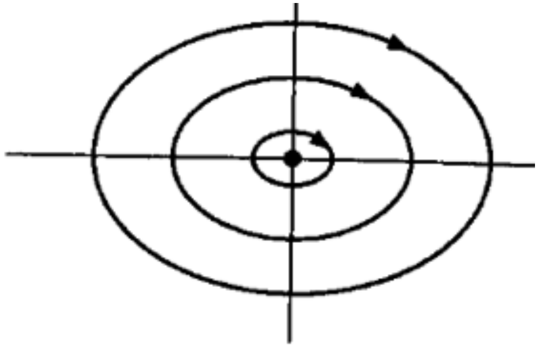
Flujos 2D – Caso lineal

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

- Si $\Delta > 0$
  - Si $\tau^2 - 4\Delta$ <0, tenemos dos **autovalores complejos.**
    - Si $\tau \neq 0$
    - $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm i\sqrt{4\Delta - \tau^2}}{2} = \alpha \pm i\omega$, donde α y ω son números reales. En la solución habrá términos con $e^{\lambda t}$, lo cual puede escribirse como $e^{\alpha t} e^{\pm i\omega t}$. Una parte que crece o decrece en módulo multiplicada por una parte que oscila. **Foco atractor o repulsor (espirales)**, dependiendo del signo de τ.

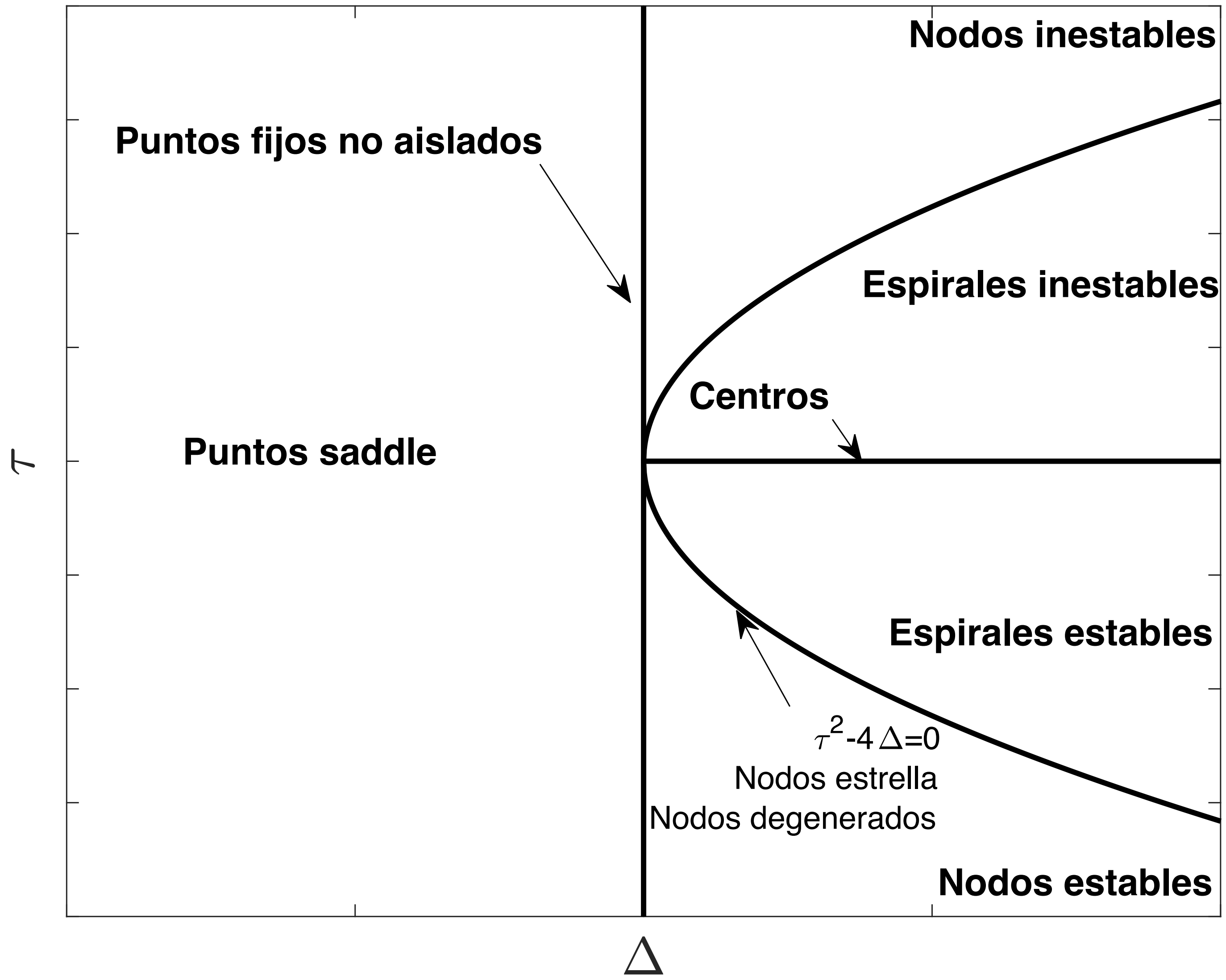


    - Si $\tau = 0$, los autovalores tienen **parte real nula**. Dada una condición inicial, las trayectorias describen circunverencias siempre a la misma distancia del punto fijo.



Resumiendo

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$



ID: 955-8444-1913 Stop Share

Talking: Santiago Boari

From jose crespo to Everyone:
esa figura esta genial

From Valentín Agulló to Everyone:
como q te colapsa la dimencion?
claro, terminas moviendote por la dim del otro auto vector.

From jose crespo to Everyone:
espectacular

From Valentín Agulló to Everyone:
muy bueno el grafico.

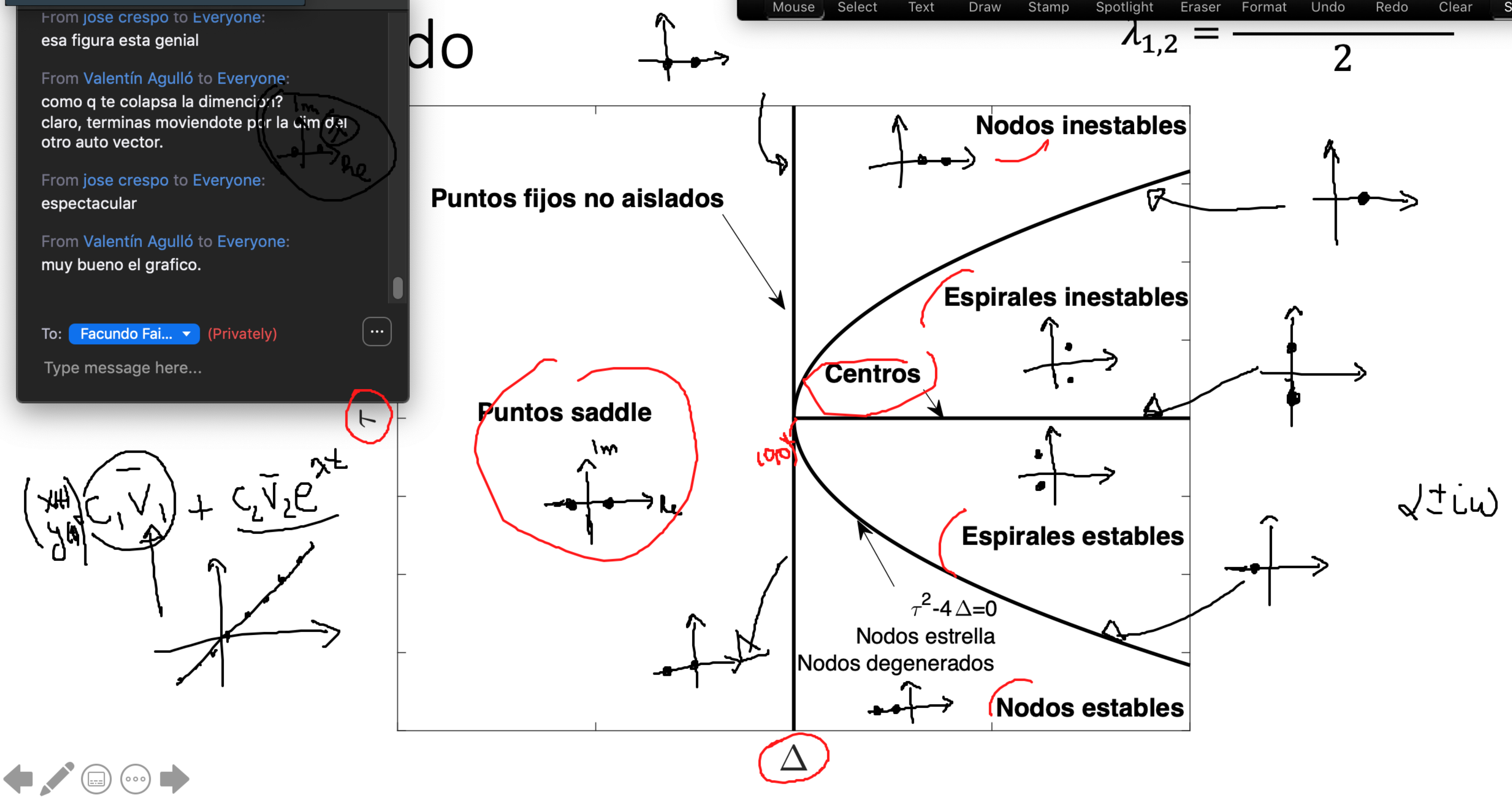
To: Facundo Fai... (Privately)

Type message here...

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

do

$$\lambda_{1,2} = \frac{\quad}{2}$$



Pausa/consultas

Ejercicios para hoy

1. (*) Clasificación de sistemas lineales Considere el sistema $\dot{x} = 4x - y, \dot{y} = 2x + y$.
   (a) Escriba el sistema en forma matricial $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$. Muestre que el polinomio característico es $\lambda^2 - 5\lambda + 6$ y encuentre los autovalores.
   (b) Encuentre la solución general del sistema.
   (c) Clasifique el punto fijo en el origen.
   (d) Resuelva el sistema con la condición inicial $(x_0, y_0) =$).

2. Considere el sistema $\dot{x} = -y, \dot{y} = -x$.
   (a) Realice un diagrama del campo vector.
   (b) Muestre que las trayectorias del sistema son hipérbolas de la forma $x^2 - y^2 = C$. Hint: Muestre que $x\dot{x} - y\dot{y} = 0$ e integre esta ecuación.
   (c) El origen es un saddle. Encuentre ecuaciones para sus variedades estables e inestables.
   (d) El sistema se puede desacoplar de la siguiente manera. Realice un cambio de variables $u = x + y, v = x - y$, y reescriba el sistema en términos de u, v. Resuelva para $u(t)$ y $v(t)$ dada una condición inicial (u_0, v_0).
   (e) Como son las ecuaciones para la variedad estable e inestable en términos de u y v?
   (f) Finalmente encuentre la solución general para $x(t)$ y $y(t)$, dada una condición inicial (x_0, y_0).

5. Dibuje el retrato de fase y clasifique los puntos fijos de los siguientes sistemas lineales. Si los autovectores son reales muéstrelos en el gráfico.

   (a) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -2x - 3y$

   (b) $\dot{x} = 5x + 10y, \qquad \dot{y} = -x - y$

   (c) $\dot{x} = 3x - 4y, \qquad \dot{y} = x - y$

   (d) (*) $\dot{x} = 5x + 2y, \qquad \dot{y} = -17x - 5y$

6. (*) Considere la ecuación de un circuito RLC, $L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = 0$, donde $LC > 0$ y $R \geq 0$.

   (a) Reescriba el sistema como de dos dimensiones.

   (b) Muestre que el origen es asintóticamente estable si $R > 0$ y neutralmente estable si $R = 0$.

   (c) Clasifique el punto fijo en el origen dependiendo si $R^2C - 4L$ es positivo, negativo o cero. Dibuje un retrato de fases para los tres casos.