DNL/MCA 2020
Práctica 13/05/2020
Cátedra Mindlin

Orador hoy: Santiago Boari

Flujos 2D – Caso no lineal

***Roadmap a “trazo grueso”*:**

- Estudiaremos el comportamiento de un sistema no-lineal buscando puntos fijos y *linealizando* el campo en un entorno de cada punto fijo.

- En un entorno de los *puntos fijos hiperbólicos*, para sistemas “bien comportados”, **el teorema de Hartman-Grobman** asegura que el sistema linealizado provee información del comportamiento del sistema NL.
- Por continuidad del flujo vamos a poder hacer un *retrato de fases* completo.

Flujos 2D – Caso no lineal

En término de las variedades invariantes

- Como vieron en teórica, si se cumple lo anterior, en un entorno de cada punto fijo las variedades *lineales* estables e inestables son tangentes a las variedades estables e inestables de ese punto fijo.

- Como vimos también a partir del caso lineal, las *nulclinas* nos servirán para sumar información al momento de hacer un retrato de fases compatible con el campo vector del problema.

Flujos 2D – Caso no lineal

$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$, con $f(x, y)$, $g(x, y)$ funciones que contienen alguna *no linealidad en las variables*.

Queremos linealizar en un entorno del punto fijo (x_0, y_0):

$$\dot{\boldsymbol{x}} \cong \begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix} + DF|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \sigma(sup)$$

Con $DF = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix}$ la *matriz diferencial* del sistema.

Flujos 2D – Caso no lineal

$\dot{\boldsymbol{x}} = \binom{\dot{x}}{\dot{y}} = \binom{f(x,y)}{g(x,y)}$, con f(x,y), g(x,y) conteniendo alguna *no linealidad*.

Queremos aproximar en un entorno del punto fijo (x_0, y_0):

$$\dot{\boldsymbol{x}} \cong \cancel{\begin{pmatrix} f(x_0, y_0) \\ g(x_0, y_0) \end{pmatrix}} + DF|_{(x_0,y_0)} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \sigma(sup)$$

Con $DF = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx} & \frac{df}{dy} \\ \frac{dg}{dx} & \frac{dg}{dy} \end{pmatrix}$ la *matriz diferencial* del sistema.

Flujos 2D – Caso no lineal (moralejas!)

- Ojo que la cuenta se puede hacer siempre, pero ¿de qué nos agarramos para decir que el sistema NL se comportará como el sistema linealizado en un entorno del punto fijo? → ***Teorema de Hartman-Grobman***
- El sistema no lineal se comportará como el linealizado siempre que la matriz diferencial del sistema ***no presente autovalores con parte real nula*** (puntos fijos hiperbólicos).
- En otras palabras: en caso de linealizar y que los autovalores tengan parte real nula, no podemos decir que el sistema linealizado provea información del comportamiento del sistema no lineal.

Flujos 2D – Caso no lineal

- Resolvamos un ejemplo!

7. **Retratos de fases**

   Para los siguientes sistemas encuentre los puntos fijos. Dibuje las nulclinas, el campo vector y un posible retrato de fases.

   (a) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = 1 - e^{x}$

   (b) (*) $\dot{x} = x - x^3, \qquad \dot{y} = -y$

   (c) (*) $\dot{x} = x(x - y), \qquad \dot{y} = y(2x - y)$

   (d) $\dot{x} = x(2 - x - y), \qquad \dot{y} = x - y$

   (e) (*) $\dot{x} = x - y, \qquad \dot{y} = x^2 - 4$

   (f) (*) $\dot{x} = \sin y, \qquad \dot{y} = x - x^3$

   (g) (oscilador van del Pol) $\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + y(1 - x^2)$

   (h) (punto fijo en un dipolo) $\dot{x} = 2xy, \qquad \dot{y} = y^2 - x^2.$

Flujos 2D – Caso no lineal

$\dot{x} = x - y$; $\dot{y} = x^2 - 4$

zoom.us Meeting View Edit Window Help — Wed 11:42 AM Santiago Boari

Talking: Juan Doppler

Zoom Group Chat

From Facundo Pugliese to Everyone: Yo fumo

From Sol Luque to Everyone: resultado

From Felipe Cignoli to Everyone: te creemos

From Federico Pietra to Everyone: meta resultado nomas

To: Everyone — File — Type message here...

ID: 955-8444-1913 — Stop Share

Mouse | Select | Text | Draw | Stamp | Spotlight | Eraser | Format | Undo | Redo | Clear | Save

Microsoft AutoUpdate — Updates are ready to be installed. — Update Later — Restart Apps

---

$$\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = x^2 - 4 \end{cases}$$

$x = y$ nulcl ($\dot{x} = 0$)

Busco pf: $x = \pm 2 \to \{(-2,-2);(2,2)\} = (x_0, y_0)$ PF

nulcl. $\dot{y} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \to 1 \qquad -1 \leftarrow \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} \to 2x \qquad 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2x & 0 \end{pmatrix} \sim DF(x,y)$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ x^2 - 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} f(x_0,y_0) \\ g(x_0,y_0) \end{pmatrix} + DF(x_0,y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix}$$

$\sqrt{17} \sim 4.1$

→ Estudio pf $(-2,-2)$

→ Busco autovals + autovecs

$$\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$$

Punto saddle

$$DF(-2,-2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(A - \lambda I) = 0$

$\hookrightarrow P(\lambda) = (1-\lambda)(-\lambda) - 4 = \lambda^2 - \lambda - 4$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 + 16}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \qquad V_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{17}}{8} \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -0.64 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$V_1 \cong \begin{pmatrix} 0.39 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad V_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{17}-1}{8} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Busco autovecs: $\lambda_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 - \frac{1-\sqrt{17}}{2} & -1 \\ -4 & -\frac{1-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_x \\ V_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \to -4V_x - \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) V_y = 0$$

$$V_x = \frac{1}{-4}\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}\right) V_y \qquad V_x = \frac{\sqrt{17}-1}{8} V_y$$

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear Save

Talking: Santiago Boari

From Flor Guastaferri to Everyone:
un flash

From jose crespo to Everyone:
si, dibujo 1

From Valentín Agulló to Everyone:
es una locura q con un par de cuentas puedas sacar semejante cosa.

From jose crespo to Everyone:
debemos practicar

To: Juan Doppler (Privately) File ...

Type message here...

$(x-y$

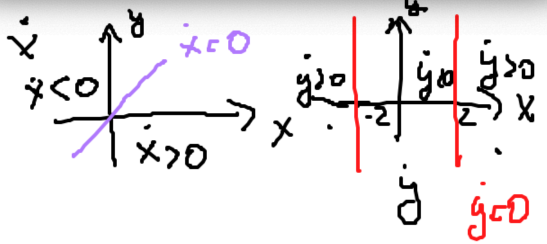
x^2-4

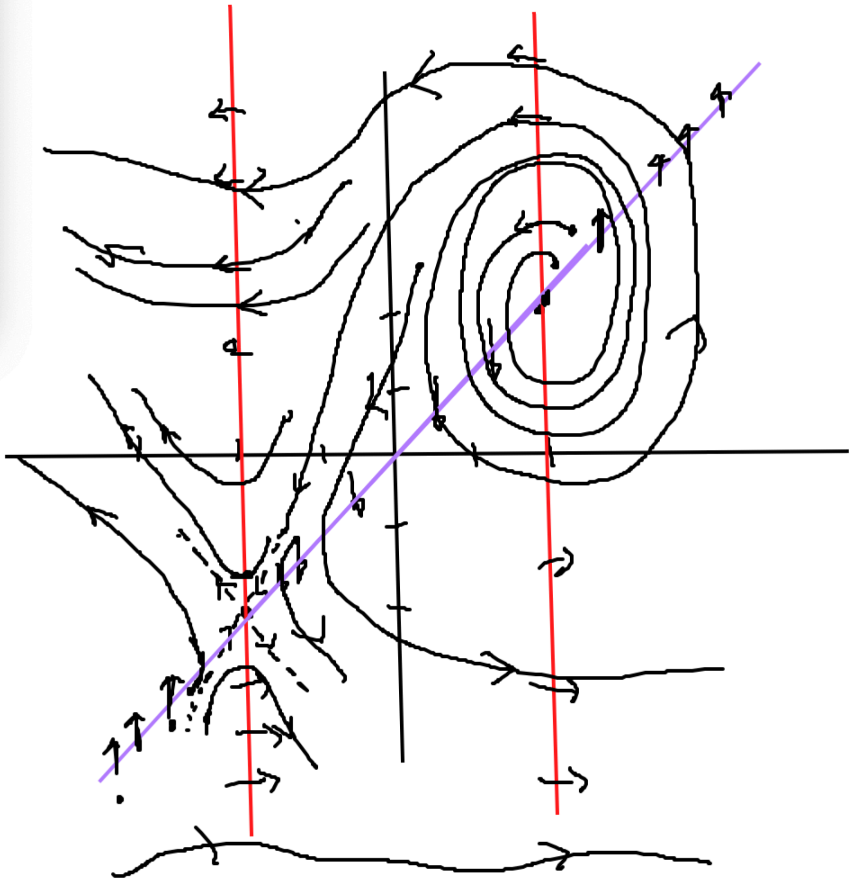
$(-2,-2)$ punto saddle

$v_1 \sim \begin{pmatrix} 0.39 \\ 1 \end{pmatrix} \to \lambda_1 < 0$

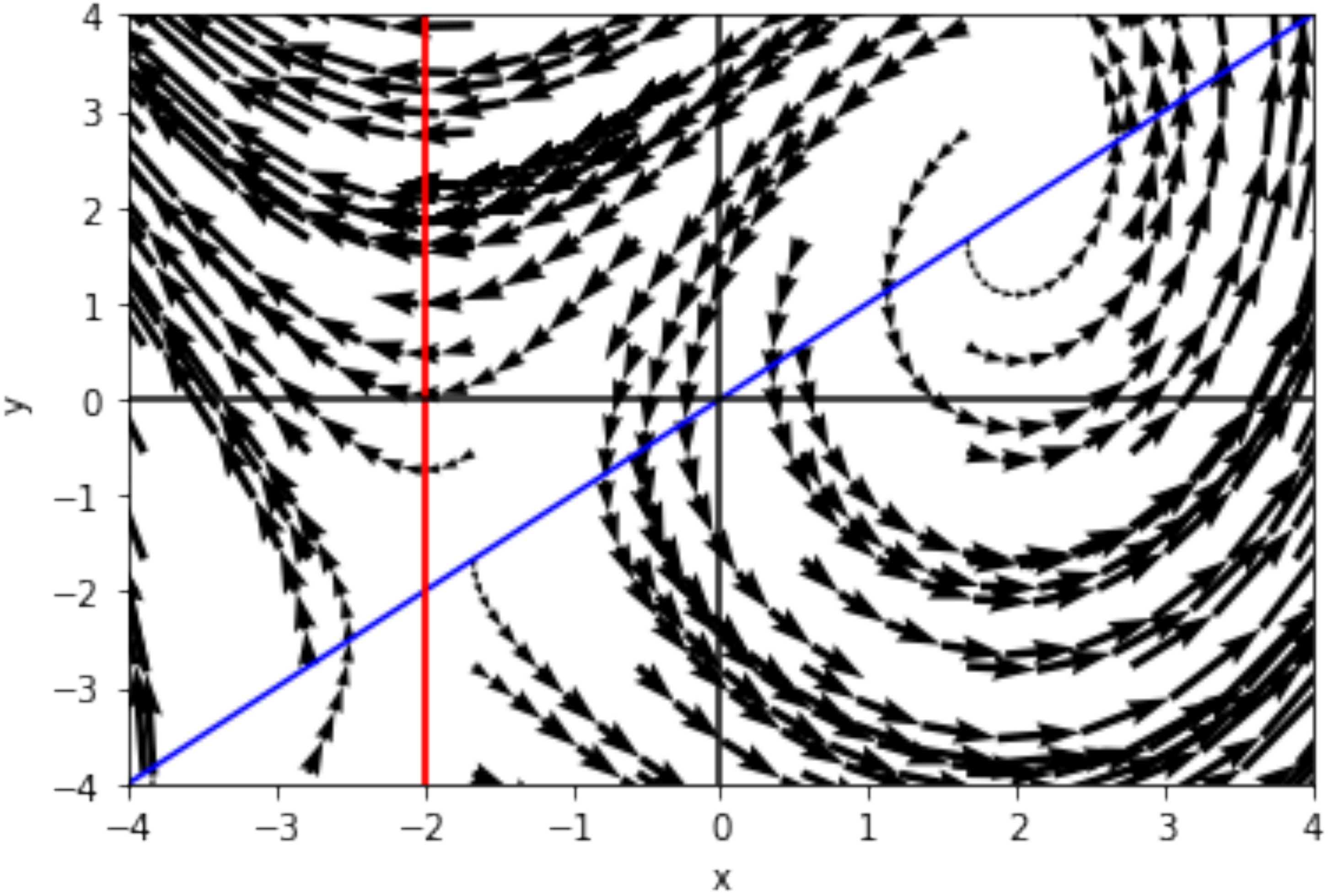
$v_2 \sim \begin{pmatrix} -0.64 \\ 1 \end{pmatrix} \to \lambda_2 > 0$

$(2,2)$ foco repulsor





$\dot{x} = x - y; \ \dot{y} = x^2 - 4$



7c

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x-y) \\ \dot{y} = y(2x-y) \end{cases} \rightarrow DF(x,y) = \begin{pmatrix} 2x-y & -x \\ 2y & 2x-2y \end{pmatrix}$$

$(0,0)$ único pf

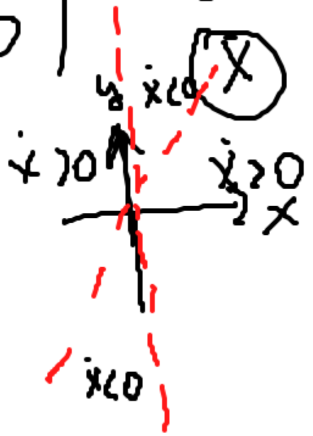
$$DF(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{no puedo linealizar!}$$

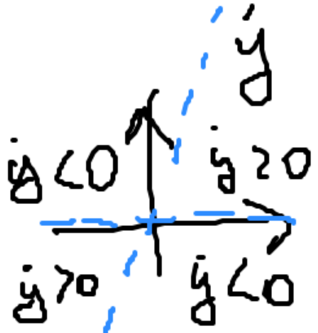
¿Y ahora?

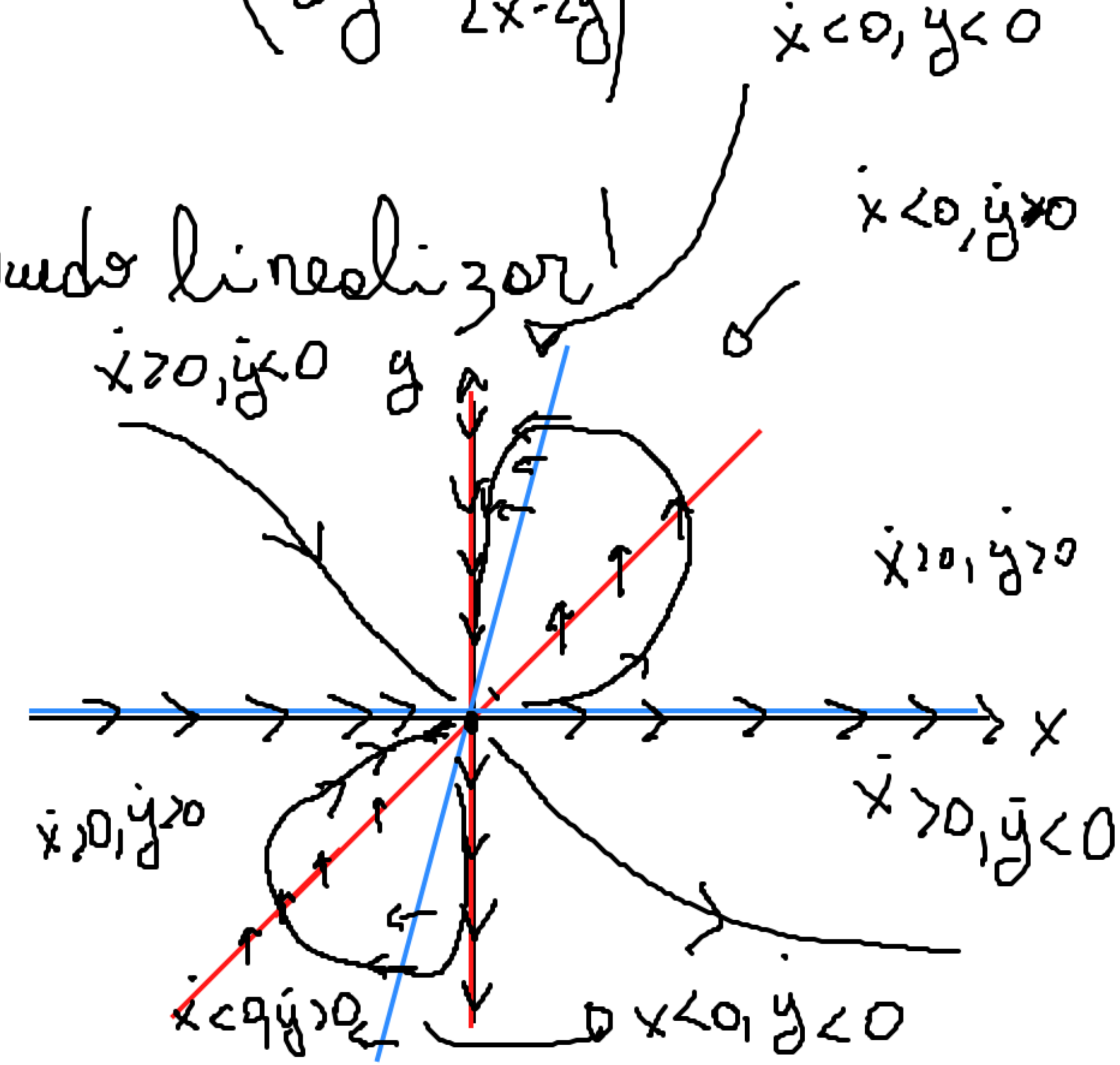
Nulclinas!!

$$\dot{x} = 0 \rightarrow x = 0, \quad y = x$$

$$\dot{y} = 0 \rightarrow y = 0, \quad y = 2x$$







- $\dot{x} = x(x - y);\ \dot{y} = y(2x - y)$