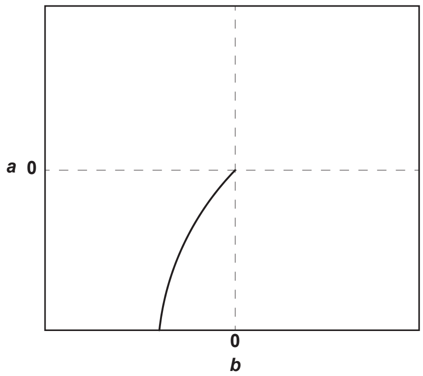
Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin
1er cuatrimestre 2020

Tema: Bifurcaciones 2D

Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fizhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular. Este modelo, bajo ciertas condiciones, puede escribirse como:

$$\dot{x} = y$$
$$\dot{y} = a + bx + x^2 - xy$$

Dado este modelo, se quiere completar el diagrama de bifurcaciones en el espacio de parámetros (b,a) de la Figura. La curva mostrada corresponde a una bifurcación homoclínica.



(a) Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i) a>>b (a>0) (ii) a<0, b>0.

(b) Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación de *Saddle-Node*.

(c) Halle la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.

(d) El sistema tiene una transición nodo-espiral. Muestre que esto ocurre cuando:

$$a^2 + 64a - 16ab = 16b^2 - 4b^3 \quad (*)$$

Ayuda: piense en la condición que debe cumplirse en esta transición.

(e) Muestre que, en la cercanía de (b,a)=(0,0), la curva anterior es cercana a $a \sim \frac{b^2}{4}$. Para esto, reemplace la igualdad en (*) y desprecie términos mayores a orden 3 luego de reemplazar. *[Ayuda: en realidad, la curva hallada en (d) se despega de la aproximación estudiada en este inciso a medida que b aumenta, pero este análisis debería ayudarle a esquematizar la curva correspondiente].*

(f) En el espacio de parámetros (b,a) represente como curvas las condiciones anteriores para completar el diagrama de bifurcaciones de la figura. Indique y justifique la cantidad de puntos fijos y su estabilidad en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano.

(g) Esquematice un retrato de fases compatible con la información obtenida para cada región.