

# Guia 4 Dinámica No Lineal - Bifurcaciones en 2D

## Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2020

**Nota:** los problemas que figuran con (\*) son obligatorios, el resto son optativos, pero recomendados.

1. Para cada uno de los siguientes sistemas encuentre los autovalores como función de  $\mu$ . Dibuje el campo vector para  $\mu = 0$  y  $\mu \neq 0$ . ¿Cuánto valen los autovalores en la bifurcación?

$$\begin{array}{lll} \dot{x} = \mu - x^2 & \dot{x} = \mu x - x^2 & (*)\dot{x} = \mu x - x^3 \\ \dot{y} = -y & \dot{y} = -y & \dot{y} = -y \end{array}$$

2. (\*) Encuentre y clasifique todas las bifurcaciones del sistema:

$$\begin{array}{l} \dot{x} = y - ax \\ \dot{y} = -by + x/(1+x) \end{array}$$

3. (\*) **Gusanos vs. Bosque.** Ludwig propuso un modelo para los efectos de una población de gusanos en un bosque de abetos. Se asume que la condición del bosque está caracterizada por  $S(t)$  (tamaño promedio de los árboles) y  $E(t)$ , reserva de energía (una medida de la salud del bosque). En presencia de una población constante de gusanos  $B$ , la dinámica del bosque está dada por:

$$\begin{array}{l} \dot{S} = r_S S \left( 1 - \frac{S}{K_S} \frac{K_E}{E} \right) \\ \dot{E} = r_E E \left( 1 - \frac{E}{K_E} \right) - P \frac{B}{S} \end{array}$$

donde  $r_S, r_E, K_S, K_E, P > 0$ .

- Interprete los términos en el modelo biológico.
  - Adimensionalice el sistema.
  - Dibuje las nulclinas. Mostrar que si  $B$  es chico hay 2 puntos fijos, y ninguno si  $B$  es grande. ¿Qué tipo de bifurcación ocurre para el valor crítico  $B_c$ ?
  - Dibuje el retrato de fases para  $B$  chico y  $B$  grande.
4. (\*) Considere el sistema  $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$ ,  $\dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$ , donde  $a$  y  $b$  son parámetros ( $0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2$ ) y  $r^2 = x^2 + y^2$ .
- Reescriba el sistema en coordenadas polares.
  - Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período  $T(a, b)$ . Recuerde que  $T(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a, b)}$ , donde  $\theta$  es el ángulo en polares.
  - Pruebe que para  $b = 0$  hay solo una órbita periódica.

5. (\*) Estudie el sistema  $\dot{r} = r(1 - r^2) + \mu r \cos \theta$ ,  $\dot{\theta} = 1$ .
- Por medio de simulaciones numéricas, vea si existe un un parámetro  $\mu > 0$  crítico donde la órbita periódica desaparece.
  - Usando el teorema de Poincaré-Bendixon muestre que hay una órbita periódica en el anillo  $\sqrt{1 - \mu} < r < \sqrt{1 + \mu}$  para todo  $\mu < 1$ .
  - Para aproximar la forma de  $R(\theta)$  de la órbita para  $\mu \ll 1$ , asuma una serie de potencias de la forma  $r(\theta) = 1 + \mu r_1(\theta) + O(\mu^2)$ . Sustituya esta solución en la ecuación diferencial  $dr/d\theta$  y aproxime tirando los términos de orden  $O(\mu^2)$ . Obtenga entonces una ecuación diferencial para  $r_1(\theta)$ , y resuélvala. Esta aproximación se conoce como *perturbación regular*.
  - Muestre que la solución está dentro del anillo encontrado previamente.
  - Compare mediante simulaciones numéricas la solución analítica encontrada y exacta. ¿Cómo depende el error de  $\mu$ ?
6. **Bifurcación de Hopf (\*)** Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en  $\mu = 0$  y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la es subcrítica o supercrítica.
- (\*)  $\dot{x} = y + \mu x$ ,  $\dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$
  - (\*)  $\dot{x} = \mu x + y - x^3$ ,  $\dot{y} = -x + \mu y + 2y^3$
  - (c)  $\dot{x} = \mu x + y - x^2$ ,  $\dot{y} = -x + \mu y + 2x^2$
7. (\*) Considere el sistema predador-presa,

$$\dot{x} = x(b - x - \frac{y}{1+x}), \quad \dot{y} = y(\frac{x}{1+x} - ay) \quad (1)$$

donde  $x, y \geq 0$  son las poblaciones y  $a, b > 0$  son parámetros.

- Dibuje las mulclinas y discuta las bifurcaciones que ocurren si  $b$  cambia.
  - Usando un método gráfico muestre que hay un punto fijo  $x^*, y^* > 0$ , para todo  $a, b > 0$ .
  - Muestre que ocurre una bifurcación de Hopf en  $(x^*, y^*)$  si  $a = a_c = \frac{4(b-2)}{b^2(b+2)}$ , donde  $b > 2$ .
  - Mediante simulaciones numéricas compruebe el resultado anterior y muestre si la bifurcación es subcrítica o supercrítica.
8. Considere el siguiente problema de dinámica de poblaciones, donde ambas tienen una capacidad de carga finita,

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= r_1 N_1 (1 - N_1/K_1) - b_1 N_1 N_2 \\ \dot{N}_2 &= r_2 N_2 (1 - N_2/K_2) - b_2 N_1 N_2 \end{aligned} \quad (2)$$

- Adimensionalice el modelo. ¿Cuántos grupos adimensionales son necesarios?
- Muestre que hay 4 retratos de fases cuantitativamente distintos, en términos del comportamiento asintótico del sistema.
- Encuentre las condiciones por las cuales las dos poblaciones pueden coexistir establemente. Explique el significado biológico de la condición.

Hint: la capacidad de carga refleja la competencia dentro de la misma especie, donde  $b$  refleja la competencia entre especies.

## 9. Modelo epidemiológico

En un trabajo pionero Kermack y McKendrick (1927) propusieron un modelo sencillo para la evolución de las epidemias. Suponga que la población puede dividirse en 3 tipos:  $x(t)$  = número de individuos sanos;  $y(t)$  = número de individuos infectados;  $z(t)$  = número de individuos muertos. En una versión más optimista, conocida como SIR, la tercera población se identifica con individuos recuperados. El

modelo es

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -kxy \\ \dot{y} &= kxy - ly \\ \dot{z} &= ly\end{aligned}\tag{3}$$

donde  $k$  y  $l$  son constantes positivas. El modelo se basa en

- Los individuos sanos se enferman a un ritmo proporcional al producto de  $x$  e  $y$ ,
- Los enfermos mueren a una tasa  $l$ .

Este sistema puede analizarse de diversas formas (ver p. ej ejercicio 3.7.6 del Strogatz para un método de reducción a 1D). La idea es analizar este problema en el espacio de fases 2D, notando que puede omitirse la evolución de la variable  $z$ .

- Encuentre y clasifique todos los puntos fijos.
- Haga un dibujo de las nulclinas y del campo vector.
- Encuentre una cantidad que se conserve en el sistema.
- Haga un retrato de fases. ¿Qué pasa en  $t \rightarrow \infty$ ?
- Sea  $(x_0, y_0)$  una condición inicial. Una epidemia ocurre cuando  $y(t)$  aumenta inicialmente. ¿Bajo que condiciones esto ocurre?

10. **Sistema excitable** Un modelo clásico de excitabilidad es el de Fitzhugh-Nagumo, que modela el potencial de acción de una membrana celular:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= a + bx + x^2 - xy\end{aligned}$$

- Dibuje las nulclinas, encuentre los puntos fijos gráficamente y construya un retrato de fases aproximado para las siguientes condiciones de parámetros: (i)  $b > 0$   $a < 0$ , (ii)  $b < 0$   $a > 0$  y  $b \gg a$ .
- Halle una relación explícita entre los parámetros del sistema para que se produzca una bifurcación *saddle-node*.
- Encuentre la condición para que se produzca una bifurcación de Hopf.
- En el espacio de parámetros  $(a, b)$  represente como curvas las dos condiciones anteriores y ensaye un retrato de fases en cada una de las regiones en las que queda dividido el plano. A partir del gráfico deduzca la necesidad de una conexión homoclínica adicional a las bifurcaciones anteriores.