Guia 5 Dinámica No Lineal - Reducción a la variedad central
Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2020

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios el resto son optativos, pero recomendados.

1. Estudie la dinámica cerca del origen de los siguientes sistemas. Dibuje los retratos de fases, y calcule la variedad central y la dinámica sobre ella. Diga si el origen es estable o inestable.

   (a)
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

   (b) (*)
   $$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned} \tag{2}$$

   (c) (*)
   $$\begin{aligned} \dot{x} &= x/2 + y + x^2 y \\ \dot{y} &= x + 2y + y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

2. Estudie los siguientes sistemas dinámicos parametrizados por ϵ. Para $\epsilon = 0$ el origen es un punto fijo. Calcule la familia de un parámetro de variedades centrales (Que significa esta pregunta?) y describa la dinámica en la variedad. Fíjese que en $\epsilon = 0$ los sistemas coinciden con los del ejercicio 1. Discuta el rol que juega el parámetro si multiplica el término lineal o nolineal.

   (a)
   $$\begin{array}{rrcl} i) & \dot{x} &=& x^2 + \epsilon y \\ & \dot{y} &=& -y - x^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} ii) & \dot{x} &=& x^2 + \epsilon y^2 \\ & \dot{y} &=& -y - x^2 \end{array} \tag{4}$$

   (b) (*)
   $$\begin{array}{rrcl} i) & \dot{\theta} &=& -\theta + \epsilon v + v^2 \\ & \dot{v} &=& -\sin\theta \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} ii) & \dot{\theta} &=& -\theta + \epsilon v^2 + v^2 \\ & \dot{v} &=& -\sin\theta \end{array} \tag{5}$$

   (c)
   $$\begin{array}{rrcl} i) & \dot{x} &=& x/2 + y + x^2 y \\ & \dot{y} &=& x + 2y + \epsilon y + y^2 \end{array} \qquad \begin{array}{rrcl} ii) & \dot{x} &=& x/2 + y + x^2 y \\ & \dot{y} &=& x + 2y + \epsilon y^2 + y^2 \end{array} \tag{6}$$

3. (*) Se quiere estudiar el siguiente sistema:

   $$\begin{aligned} \dot{x} &= \epsilon(-x + xy) \\ \dot{y} &= -y + x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

   Como hemos visto en ejercicios anteriores, este sistema tiene dos escalas de tiempo y por lo tanto se podrá reducir su dimensión. La idea de este problema es formalizar la manera en que se venía haciendo esa reducción. La propuesta es resolverlo primero a la vieja usanza y luego resolverlo reduciendo a la variedad central.

(a) Para $\epsilon \ll 1$ encuentre la ecuación diferencial a la cual se aproxima el problema

(b) Pensando a ϵ como un parámetro, muestre que el origen es un punto de bifurcación si $\epsilon = 0$, es decir hay algún autovalor $\lambda = 0$ y por lo tanto se podrá reducir a la variedad central.

(c) Reduzca el sistema a la variedad central y encuentre la dinámica sobre la misma (para esto conviene hacer el truco de pensar a ϵ como una variable y agregar una ecuación simple para su dinámica $\dot{\epsilon} = 0$). ¿Encontró lo mismo que haciéndolo a "ojo"?

Nota: Si salió todo bien uno debería recuperar la misma dinámica con cualquiera de los dos métodos. Reduciendo a la variedad central uno demostró que en un entorno del origen, y para ϵ lo suficientemente chicos, existe una solución $u(t)$ del sistema reducido que cumple con

$$\begin{aligned} x(t) &= u(t) + O(e^{-\gamma t}) \\ y(t) &= h(u(t), \epsilon) + O(e^{\gamma t}) \end{aligned} \tag{8}$$

con $\gamma > 0$ una constante.

4. El sistema:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + x^2 - y^2 \\ \dot{y} &= ay - y^3 + xy \end{aligned} \tag{9}$$

presenta dos bifurcaciones.

(a) Calcule los puntos fijos (no se complique con una expresión explícita, pero muestre claramente en forma gráfica las soluciones)

(b) Muestre que uno de los autovalores del jacobiano se anula en cada bifurcación. Nombre cada bifurcación e identifique el punto fijo que está bifurcando en cada caso.

(c) Considere un entorno del origen. En términos del método de la variedad central: ¿para qué valores del parámetro espera poder reducir la dinámica a una descripción unidimensional?

(d) Calcule la variedad central que depende del parámetro. Reduzca la dinámica a la variedad central e identifique la bifurcación que quedó incluida. ¿Coincide con el resultado del ítem 2?