Hopf

Dinámica no lineal

Cátedra G. Mindlin

Viernes 22 de Mayo de 2020

Teorema de Poincaré-Bendixson

Teorema de Poincaré-Bendixson

Región atrapante

Teorema de Poincaré-Bendixson

Región atrapante + Sin puntos fijos

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2), \quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

   (a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$x = r\cos(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2$$

$$y = rsin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$x = r\cos(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \qquad \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$y = r\sin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros ($0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2$) y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$x = r\cos(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \qquad \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$y = r\sin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$x = r\cos(\theta) \qquad r^2 = x^2 + y^2 \qquad \rightarrow 2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} \qquad \dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$y = r\sin(\theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x} \qquad \rightarrow \dot{\theta} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}}\frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{x^2} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2), \quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2), \quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(a) Reescriba el sistema en coordenadas polares.

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$

$$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - \dot{x}y}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = -1 - 2ab\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2), \quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a,b)$. Recuerde que $T(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a,b)}$, donde θ es el ángulo en polares.

$$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$$

$$\dot{\theta} = -1 - 2ab\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

   (b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a,b)$. Recuerde que $T(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a,b)}$, donde θ es el ángulo en polares.

$$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$$

Región atrapante + Sin puntos fijos

$$\dot{\theta} = -1 - 2ab\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a, b)$. Recuerde que $T(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a,b)}$, donde θ es el ángulo en polares.

$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$

Región atrapante + Sin puntos fijos

$\dot{\theta} = -1 - 2ab\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$

$0 \leq b < \frac{1}{2}$ $\qquad 2b\cos^2(\theta)$

$0 \leq a < 1$ $\qquad 2ab\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a, b)$. Recuerde que $T(a, b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a,b)}$, donde θ es el ángulo en polares.

$$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$$

$$\dot{\theta} = -1 - 2ab\,\mathrm{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1-2b-r^2)$, $\quad \dot{y} = -x + ay(1-r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

(b) Pruebe que tiene al menos una órbita periódica, y que si tiene más de una todas tienen el mismo período $T(a,b)$. Recuerde que $T(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\dot{\theta}(a,b)}$, donde θ es el ángulo en polares.

$$\dot{r} = ar\left(1 - r^2 - 2b\cos^2(\theta)\right)$$

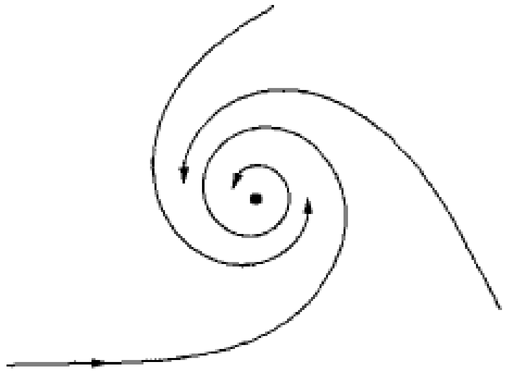
$$\dot{\theta} = -1 - 2ab\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$$

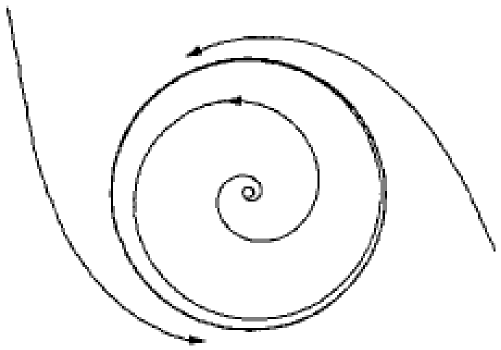
$$T(a,b) = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{-1 - 2ab\,\text{sen}(\theta)\cos(\theta)}$$

4. (*) **Bifurcación de Hopf** Considere el sistema $\dot{x} = y + ax(1 - 2b - r^2), \quad \dot{y} = -x + ay(1 - r^2)$, donde a y b son parámetros $(0 < a \leq 1, 0 \leq b < 1/2)$ y $r^2 = x^2 + y^2$.

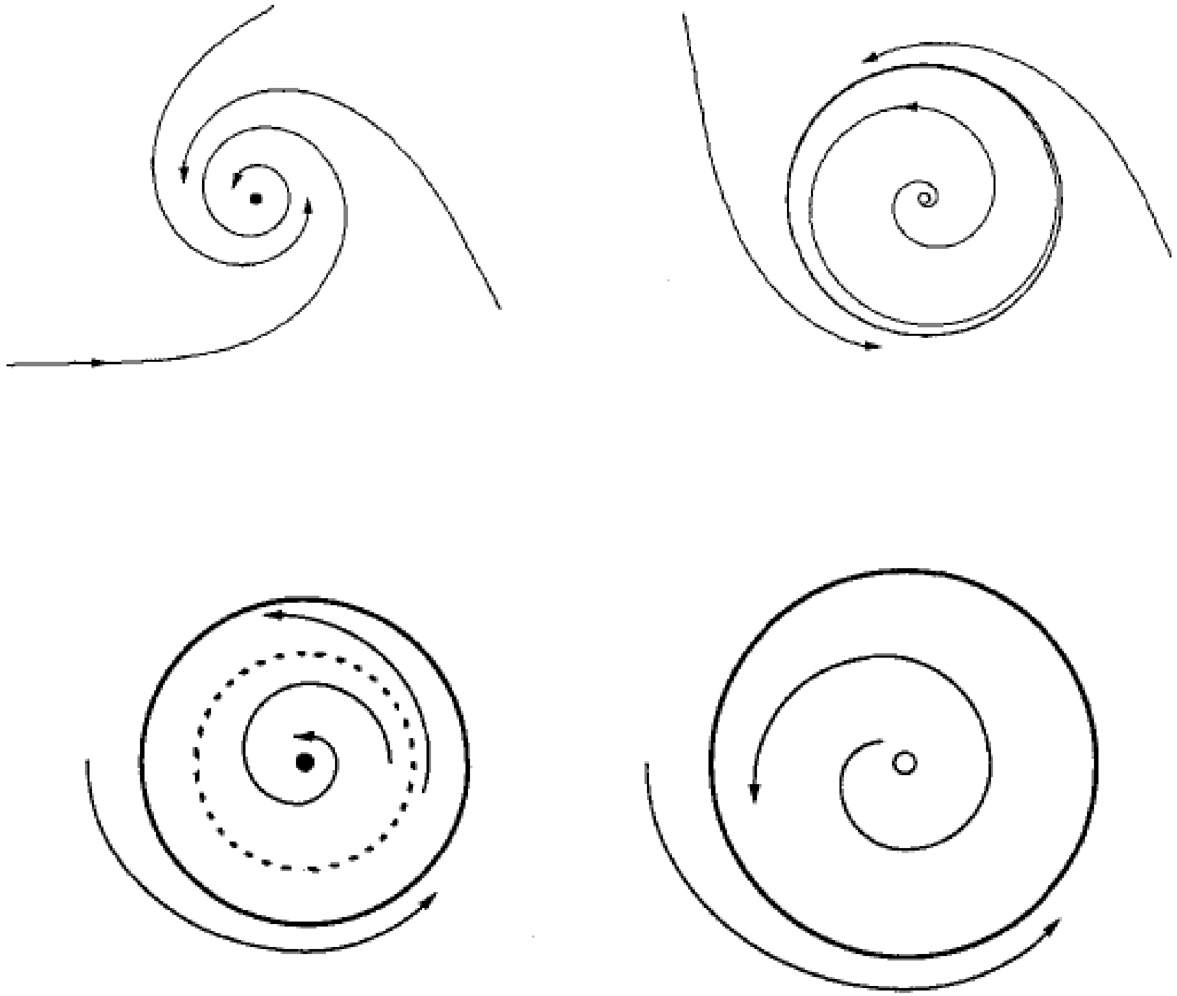
   (c) Pruebe que para $b = 0$ hay solo una órbita periódica.

Bifurcación de Hopf

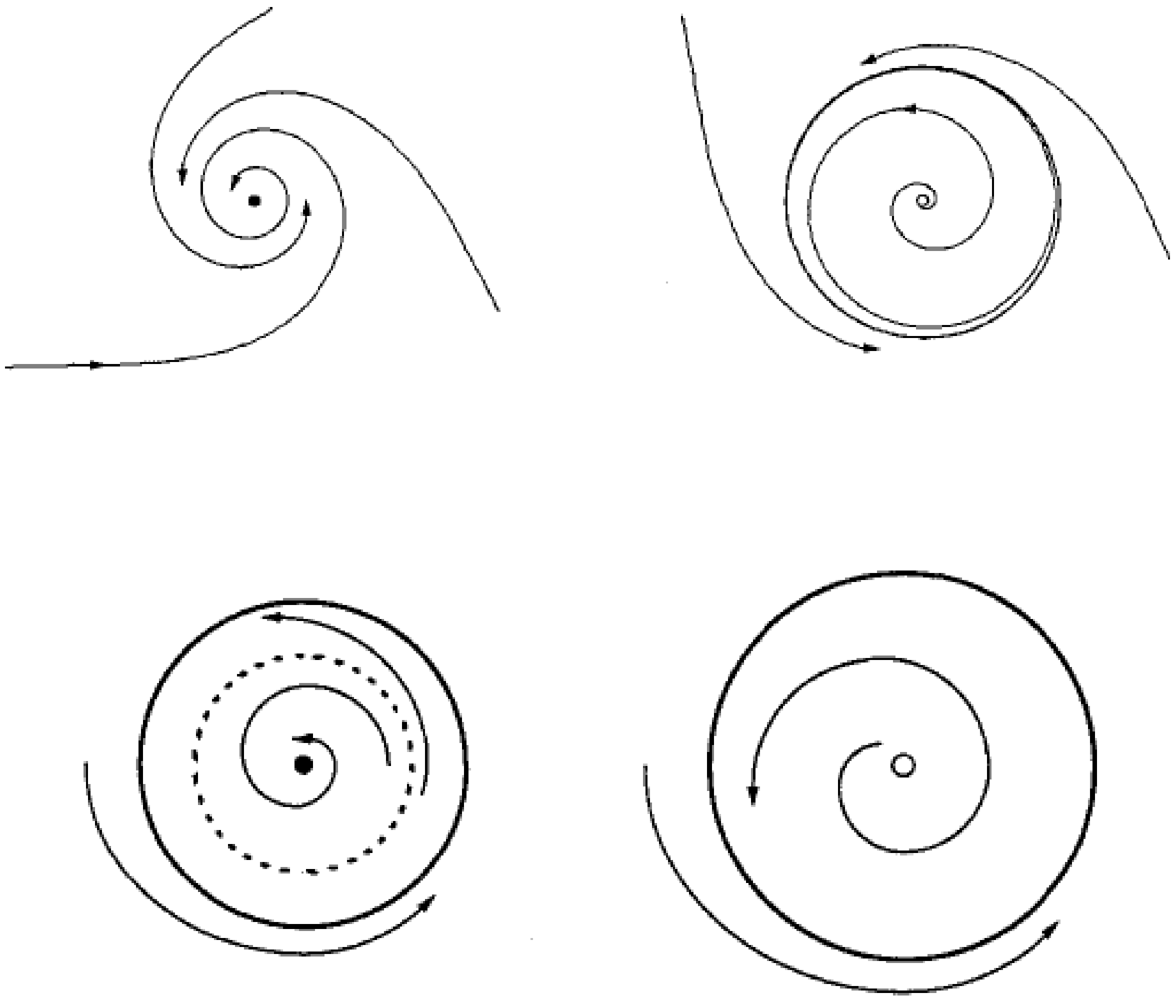


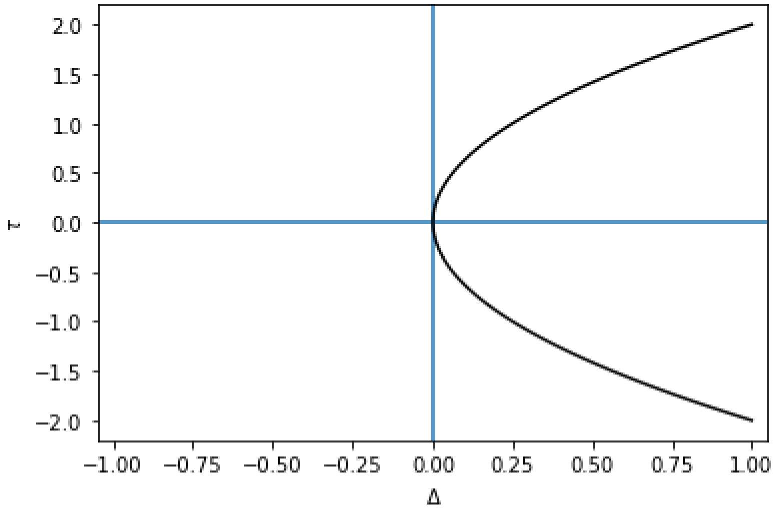


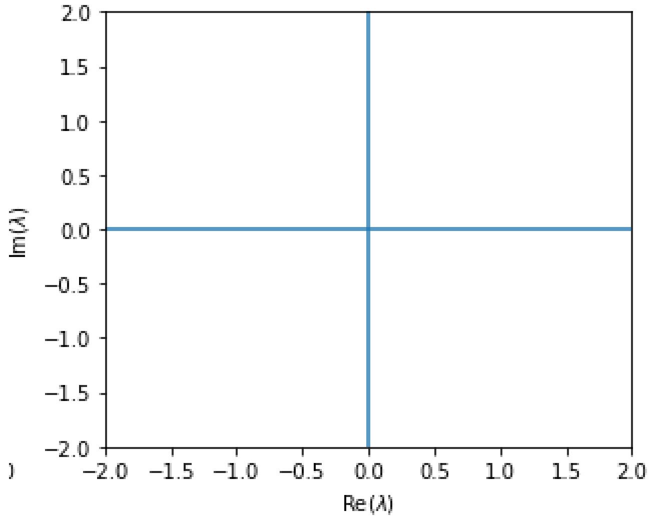
Bifurcación de Hopf



Bifurcación de Hopf







6. Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la es subcrítica o supercrítica.

   (a) (*) $\dot{x} = y + \mu x, \qquad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$

6. Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la es subcrítica o supercrítica.

(a) (*) $\dot{x} = y + \mu x, \qquad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$

¿De qué lado está el ciclo límite?

6. Para cada uno de los siguientes sistemas muestre que el origen tiene una bifurcación de Hopf en $\mu = 0$ y, mediante simulaciones numéricas, verifique si la es subcrítica o supercrítica.

   (a) (*) $\dot{x} = y + \mu x, \qquad \dot{y} = -x + \mu y - x^2 y$

$$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}$$