DNL/MCA 2020
Práctica 05/06/2020
Cátedra Mindlin

Orador hoy: Santiago Boari

Formas Normales

Formas normales: el concepto

- Método para expresar un sistema dinámico no-lineal en un sistema de coordenadas tal que tome su forma “más simple”.
- Método *local*: en la cercanía de puntos fijos (en lo que vimos hasta ahora). También hay formas normales para *mapas*.
- Las transformaciones de coordenadas serán no-lineales. Pero las encontraremos resolviendo una serie de *problemas lineales*.
- La forma normal puede ser desarrollada hasta un cierto orden *deseado*.
- Súper importante: la **forma normal de un sistema está determinada por el comportamiento de su parte lineal.**

Formas normales: repaso

Sea un sistema dinámico de dimension n definido por:

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}),$$

$$F: R^n \to R^n, F(0) = 0$$

Es decir, tiene un punto fijo en **X**=0 (para un punto fijo distinto de 0, se traslada el sistema tal que el punto fijo quede en el origen). Alrededor de este pf, podemos desarrollar en Taylor a *F*:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \boldsymbol{F_k}(\boldsymbol{x}) + O(|\boldsymbol{x}|^{k+1})$$

$$\boldsymbol{F_k} \in H^r$$

H^r: espacio de poliniomios de grado *r*

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \sum \boldsymbol{F}_k(\boldsymbol{x})$$

Formas normales: objetivo

$\overline{x} = \overline{y} + h_r(\overline{y}),\ con\ h_r \in H^r,\ r \geq 2.$
$h_r(\overline{y})$ es el cambio *no-lineal* de coordenadas que queremos hacer para transformar el problema original en:

- $\frac{dy}{dt} = Ay - L_{DF}h_r + F_r(y) + O(|y|^{r+1}),$ con:
- $L_{DF}h_r \equiv -(-Dh_r DFy + DFh_r).$

- Si pudiéramos elegir h_r tal que $-L_{DF}h_r + F_r(y) = 0$, simplificaríamos los términos de orden *r* del campo vector. Notar que esto implica $h_r = L_{DF}^{-1}F_r(y)$. Es decir, la gracia es que el operador L_{DF} sea *invertible* para poder eliminar la mayor cantidad de términos no lineales del problema original.

- En otras palabras, ***podremos eliminar todos los términos que estén en la imagen del operador*** L_{DF}. Si la imagen de L_{DF} es H^r, podremos eliminar todas las no-linealidades de orden r. Si existe un complemento de la imagen, los términos que sobreviven no podrán ser eliminados y se denominan ***términos resonantes*.**

Formas normales: notación

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{F_1}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{F_2}(\boldsymbol{x}) + \cdots + \boldsymbol{F_k}(\boldsymbol{x}) + O(|\boldsymbol{x}|^{k+1})$$

$$\boldsymbol{F_k} \in H^r$$

- $F_r(x) = \sum_{m_1=0}^{r} \sum_{m_2=0}^{r} \dots \sum_{m_n=0}^{r} \sum_{j=1}^{n} a_{\overrightarrow{\overline{m}}}^{j} \overline{x}^{\overline{m}} \, \overline{e}_j$

con

- $\sum_{j=1}^{n} m_j = r$,
- $\overline{m} \equiv (m_1, m_2, \dots, m_n)$,
- $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$,
- $\overline{x}^{\overline{m}} = {x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} \dots {x_n}^{m_n}$,

$$\overline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ejemplo de esta notación

- $\binom{x_1 {x_2}^2}{0}$

se puede escribir, en nuestra notación,

- $\binom{x_1 {x_2}^2}{0} = \overline{e}_1 (x_1 {x_2}^2).1,$

y por lo tanto, $a^{(1)}_{(1,2)} = 1$.

$F_r(x) = \sum_{m_1=0}^{r} \sum_{m_2=0}^{r} \dots \sum_{m_n=0}^{r} \sum_{j=1}^{n} a^{j}_{\overline{m}} \overline{x}^{\overline{m}}\, \overline{e}_j$

con

$$\sum_{j=1}^{n} m_j = r,$$

$$\overline{m} \equiv (m_1, m_2, \dots, m_n),$$

$$\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\overline{x}^{\overline{m}} = {x_1}^{m_1} {x_2}^{m_2} \dots {x_n}^{m_n},$$

$$\overline{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formas normales: caso *A diagonal*

En este caso, en teórica vieron que la base de los monomios homogéneos de orden *r* son una ***base de autoestados*** *del operador* L_{DF}, con autovalores $\Lambda_{\overline{m}} = (\overline{m}.\overline{\lambda} - \lambda_i)$.

$$L_{DF}\left(\overline{x}^{\overline{m}}\overline{e}_j\right) \equiv -\left(-D(x^{\overline{m}}\overline{e}_j)A\overline{x} + (A)x^{\overline{m}}\overline{e}_j\right) = (\overline{m}.\overline{\lambda} - \lambda_i)\, x^{\overline{m}}\overline{e}_j.$$

y otro resultado que vieron es que los términos para los cuales $\Lambda_{\overline{m}} = (\overline{m}.\overline{\lambda} - \lambda_i)$=0 serán los términos ***resonantes*** del sistema.

Formas normales: vamos a un ejercicio simple

1. Determine la forma normal de los siguientes sistemas linearizados

$$i)\ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad ii)\ \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad iii)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad iv)\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

You are screen sharing Stop Share

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Forma

Zoom Group Chat

no es al revez?

From Debora Copacopa to Everyone:

y el termino resonante

From Ramiro Severino to Everyone:

de donde ves el coeficiente?
ok no, pense que lo veias asi nomas a simple vista. ok ok

From Valentín Aguiló to Everyone:

ese a sale de la parte no linal

To: Everyone File ···

Type message here...

i) $\boxed{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}}$ A

$\lambda \neq 0$

$H^2 = \{ (x_1^2 \ldots$

$0) (0) (x_1^2) (x_1 x_2) (x_2^2)$

$\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i \overset{?}{=} 0 \to$ voy a tener términos resonantes

$\bar{x}^{\bar{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots$

A en forma diagonal $\bar{m} = (m_1, m_2)$

λ 2λ → tenemos 1 término resonante a orden 2

$\bar{m}$	$i=1$	$i=2$
$(2,0)$	λ	
$(1,1)$	2λ	λ
$(0,2)$	3λ	2λ

$(2,0)$ m_1 m_2 $i=2$ → $\begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + O(3)}$$

$\overset{m_1\, m_2}{(2,0)} \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} - \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda$

$(2,0) \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} - 2\lambda = 2\lambda - 2\lambda = 0$

$(1,1) \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} - \lambda = 3\lambda - \lambda = 2\lambda$

You are screen sharing · Stop Share

i) $\boxed{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}}$ A $\lambda \neq 0$

$$H^r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^{r_1} x_2^{r_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^r \end{pmatrix} \right\}$$

Mouse · Select · Text · Draw · Stamp · Spotlight · Eraser · Format · Undo · Redo · Clear · Save

$\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i \overset{?}{=} 0 \rightarrow$ voy a tener términos resonantes

$\bar{m} = (\overset{m_1}{r}, \overset{m_2}{0})$ $i=1$ $(\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = r\lambda - \lambda = \lambda(r-1) = 0 \rightarrow r=1$ pero $r \geq 2$

$i=2$ $(\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = \lambda(r-2) = 0 \rightarrow \underline{r=2}$ es lo de antes!

$(r,0)\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$

$\bar{m} = (0, r)$ $i=1$ $(\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = 2r\lambda - \lambda \rightarrow$ no se anula pero $r \in \mathbb{N}$

$i=2$ $(\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = 2r\lambda - 2\lambda \rightarrow r=1 \rightarrow$ pero $r \geq 2$

$r_1 + r_2 = r$

$\bar{m} = (r_1, r_2)$

$i=1$ $\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda = 2r\lambda - r_1\lambda - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{r = \frac{r_1+1}{2}}$ r_1 impar

$\hookrightarrow r_2 = r - r_1 = \frac{r_1+1-2r_1}{2} = \frac{-r_1+1}{2}$ $r_2 \geq 1$ $\rightarrow r_1 \leq -1$ Abs!

no sería resonante para ningún r

Zoom Group Chat

o sea, perdon. la conclusion es que ese termino nunca es resonante, no?

From Felipe Cignoli to Everyone:
sip

From Ramiro Severino to Everyone:
:D

From Flor Guastaferri to Everyone:
recapitulando, para r1 y r2 no hay resonantes no?
bien

To: Everyone · File · ...

Type message here...

You are screen sharing
Stop Share

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser Format Undo Redo Clear

Encarado de ...

$h_r = a\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\x_1^r\end{pmatrix}$

$H^r = \left\{ \begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\\0\end{pmatrix} \ldots \right\}$

- $L_{DF}h_r \equiv -(-Dh_r DF y + DF h_r)$
- $L_{DF}\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\lambda & 0\\0 & 2\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}rx_1^{r\ldots}\\0\end{pmatrix}$
- $L_{DF}\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\lambda x_1^r\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}rx_1^{r-\ldots}\\0\end{pmatrix}$
- $L_{DF}\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} = -\begin{pmatrix}\lambda x_1^r\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}r\lambda x_1^r\\0\end{pmatrix}$
- $L_{DF}\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda(r-1)x_1^r\\0\end{pmatrix}$
- Que es a lo que habíamos llegado antes usando la notación reducida.
- *Pro* de repasar cómo hacerlo de esta manera: sirve para cuando *A* no es diagonal!

$Dh_r\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r x_1^{r-1} & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$Dh_r\begin{pmatrix}x_1^{r_1}x_2^{r_2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 x_1^{r_1-1}x_2^{r_2} & r_2 x_1^{r_1}x_2^{r_2-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$L_{DF}\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix} = \lambda(r-1)\begin{pmatrix}x_1^r\\0\end{pmatrix}$

$m\lambda - \lambda$

Zoom Group Chat

en la segunda coordenada

From Debora Copacopa to Everyone:
significa q no podes invertir

From Milton Aguilar to Everyone:
Ahh claro. No me quedaba claro como reconciliar lo anterior con esto que dijiste recien
Pero esto de buscar el complemento es para las cosas no diagonales
Perfecto, gracias

To: Everyone
File
Type message here...

Encarado de otra manera.... (ejemplo c/

- $L_{DF} h_r \equiv -(-Dh_r DF y + DF h_r)$

- $L_{DF}\begin{pmatrix} x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r x_1{}^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$
- $L_{DF}\begin{pmatrix} x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r x_1{}^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{pmatrix} =$
- $L_{DF}\begin{pmatrix} x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\lambda x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} =$
- $L_{DF}\begin{pmatrix} x_1{}^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda(r-1)x_1{}^r} \\ 0 \end{pmatrix}$
- Que es a lo que habíamos llegado antes usando la notació
- *Pro* de repasar cómo hacerlo de esta manera: sirve para c

Zoom Group Chat

From Debora Copacopa to Everyone:
ok
dale dale

From jose crespo to Everyone:
si, porfa!
que decante

From Debora Copacopa to Everyone:
gracias!

To: Juan Doppler (Privately) File

Type message here...

Encarado de otra manera…. (ejemplo c/1)

- $L_{DF}h_r \equiv -(-Dh_rDFy + DFh_r)$

- $L_{DF}\begin{pmatrix} {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r{x_1}^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$
- $L_{DF}\begin{pmatrix} {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r{x_1}^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{pmatrix} =$
- $L_{DF}\begin{pmatrix} {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \lambda {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\lambda {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} =$
- $L_{DF}\begin{pmatrix} {x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(r-1){x_1}^r \\ 0 \end{pmatrix}$
- Que es a lo que habíamos llegado antes usando la notación reducida.
- *Pro* de repasar cómo hacerlo de esta manera: sirve para cuando *A* no es diagonal!