

DNL/MCA 2020
Práctica 05/06/2020
Cátedra Mindlin

Orador hoy: Santiago Boari

Formas Normales

Formas normales: el concepto

- Método para expresar un sistema dinámico no-lineal en un sistema de coordenadas tal que tome su forma “más simple”.
- Método *local*: en la cercanía de puntos fijos (en lo que vimos hasta ahora). También hay formas normales para *mapas*.
- Las transformaciones de coordenadas serán no-lineales. Pero las encontraremos resolviendo una serie de *problemas lineales*.
- La forma normal puede ser desarrollada hasta un cierto orden *deseado*.
- Súper importante: la **forma normal de un sistema está determinada por el comportamiento de su parte lineal.**

Formas normales: repaso

Sea un sistema dinámico de dimensión n definido por:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}),$$

$$\mathbf{F}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n, \mathbf{F}(0) = 0$$

Es decir, tiene un punto fijo en $\mathbf{X}=0$ (para un punto fijo distinto de 0, se traslada el sistema tal que el punto fijo quede en el origen). Alrededor de este pf, podemos desarrollar en Taylor a F :

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{F}_2(\mathbf{x}) + \cdots + \mathbf{F}_k(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{k+1})$$

$$\mathbf{F}_k \in H^r$$

H^r : espacio de polinomios de grado r

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \sum \mathbf{F}_k(\mathbf{x})$$

Formas normales: objetivo

$\bar{x} = \bar{y} + h_r(\bar{y})$, con $h_r \in H^r$, $r \geq 2$.

$h_r(\bar{y})$ es el cambio *no-lineal* de coordenadas que queremos hacer para transformar el problema original en:

- $\frac{dy}{dt} = Ay - L_{DF}h_r + F_r(y) + O(|y|^{r+1})$, con:
- $L_{DF}h_r \equiv -(-Dh_rDFy + DFh_r)$.
- Si pudiéramos elegir h_r tal que $-L_{DF}h_r + F_r(y) = 0$, simplificaríamos los términos de orden r del campo vector. Notar que esto implica $h_r = L_{DF}^{-1}F_r(y)$. Es decir, la gracia es que el operador L_{DF} sea *invertible* para poder eliminar la mayor cantidad de términos no lineales del problema original.
- En otras palabras, **podremos eliminar todos los términos que estén en la imagen del operador L_{DF}** . Si la imagen de L_{DF} es H^r , podremos eliminar todas las no-linealidades de orden r . Si existe un complemento de la imagen, los términos que sobreviven no podrán ser eliminados y se denominan **términos resonantes**.

Formas normales: notación

$$F(\mathbf{x}) = F_1(\mathbf{x}) + F_2(\mathbf{x}) + \cdots + F_k(\mathbf{x}) + O(|\mathbf{x}|^{k+1})$$

$$F_k \in H^r$$

$$\bullet F_r(\mathbf{x}) = \sum_{m_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \cdots \sum_{m_n=0}^r \sum_{j=1}^n a_{\vec{m}}^j \bar{x}^{\vec{m}} \bar{e}_j$$

con

$$\bullet \sum_{j=1}^n m_j = r,$$

$$\bullet \bar{m} \equiv (m_1, m_2, \dots, m_n),$$

$$\bullet \bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\bullet \bar{x}^{\bar{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n},$$

$$\bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

Ejemplo de esta notación

- $\binom{x_1 x_2^2}{0}$

se puede escribir, en nuestra notación,

- $\binom{x_1 x_2^2}{0} = \bar{e}_1(x_1 x_2^2) \cdot 1,$

y por lo tanto, $a_{(1,2)}^{(1)} = 1.$

$$F_r(x) = \sum_{m_1=0}^r \sum_{m_2=0}^r \cdots \sum_{m_n=0}^r \sum_{j=1}^n a_{\bar{m}}^j \bar{x}^{\bar{m}} \bar{e}_j$$

con

$$\sum_{j=1}^n m_j = r,$$

$$\bar{m} \equiv (m_1, m_2, \dots, m_n),$$

$$\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

$$\bar{x}^{\bar{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_n^{m_n},$$

$$\bar{e}_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Formas normales: caso *A diagonal*

En este caso, en teórica vieron que la base de los monomios homogéneos de orden r son una **base de autoestados del operador** L_{DF} , con autovalores $\Lambda_{\bar{m}} = (\overline{m. \bar{\lambda}} - \lambda_i)$.

$$L_{DF} \left(\bar{x}^{\bar{m}} \bar{e}_j \right) \equiv - \left(-D(\bar{x}^{\bar{m}} \bar{e}_j) A \bar{x} + (A) \bar{x}^{\bar{m}} \bar{e}_j \right) = (\overline{m. \bar{\lambda}} - \lambda_i) \bar{x}^{\bar{m}} \bar{e}_j.$$

y otro resultado que vieron es que los términos para los cuales $\Lambda_{\bar{m}} = (\overline{m. \bar{\lambda}} - \lambda_i) = 0$ serán los términos **resonantes** del sistema.

Formas normales: vamos a un ejercicio simple

1. Determine la forma normal de los siguientes sistemas linearizados

$$i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \quad ii) \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad iii) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad iv) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}^A$$

$$\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i = 0 \rightarrow$$

A en forma diagonal

| \bar{m} | $i=1$ | $i=2$ |
|-----------|------------|------------|
| (2,0) | λ | λ |
| (1,1) | 2λ | λ |
| (0,2) | 3λ | 2λ |

$$\begin{matrix} m_1 & m_2 \\ (2,0) & \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \end{matrix} - \lambda = 2\lambda - \lambda = \lambda$$

$$(2,0) \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} - 2\lambda = 2\lambda - 2\lambda = 0$$

$$(1,1) \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix} - \lambda = 3\lambda - \lambda = 2\lambda$$

Zoom Group Chat

no es al revez?

From Debora Copacopa to Everyone:
y el termino resonante

From Ramiro Severino to Everyone:
¿de donde ves el coeficiente?
ok no, pense que lo veias asi nomas a simple vista. ok ok

From Valentin Agullo to Everyone:
ese a sale de la parte no linal

To: Everyone

Type message here...

Mouse Select Text Draw Stamp Spotlight Eraser

$$H = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

terminos resonantes

$$x^{\bar{m}} = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots$$

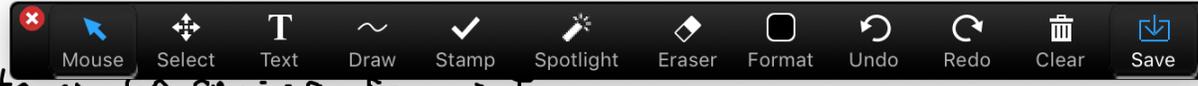
1 termino resonante

(2,0) $i=2$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^2 \end{pmatrix} + O(3)$$

$$i) \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix}^A \quad \lambda \neq 0$$

$$H^r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^r x_2^r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2^r \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^r x_2^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^r \end{pmatrix} \right\}$$



$\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i = 0 \rightarrow$ voy a tener términos resonantes

$$\bar{m} = \begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ r & 0 \end{pmatrix}$$

$i=1 \quad (\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = r\lambda - \lambda = \lambda(r-1) = 0 \rightarrow r=1$ pero

$i=2 \quad (\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = \lambda(r-2) = 0 \rightarrow r=2$ es lo que antes!

$$(r, 0) \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\bar{m} = (0, r)$$

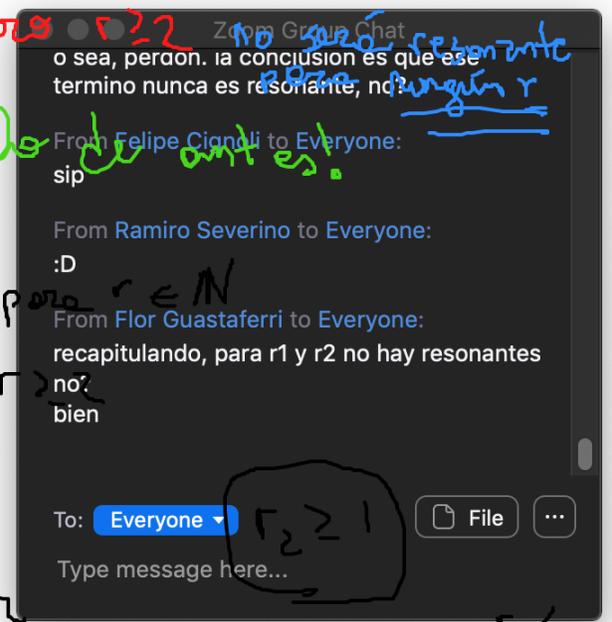
$i=1 \quad (\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = 2r\lambda - \lambda \rightarrow$ no se anula para $r \in \mathbb{N}$

$i=2 \quad (\bar{m}\bar{\lambda} - \lambda_i) = 2r\lambda - 2\lambda \rightarrow r=1$ pero $r \geq 2$ bien

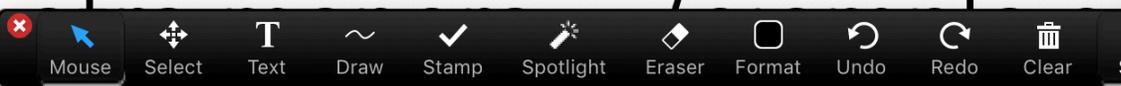
$$\bar{m} = (r_1, r_2) \quad r_1 + r_2 = r$$

$i=1 \quad \bar{m}\bar{\lambda} - \lambda = 2r\lambda - r_1\lambda - \lambda = 0 \rightarrow \boxed{r = \frac{r_1 + 1}{2}}$

r_1 impar $\rightarrow r_2 = r - r_1 = \frac{r_1 + 1}{2} - r_1 = -\frac{r_1 - 1}{2}$ Abs!



Encarado de



$$h_r = \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^r \end{pmatrix}$$

$$H^r = \left\{ \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x_1^r & x_2^r \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$L_{DF} h_r \equiv -(-Dh_r DFy + DFh_r)$$

$$L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

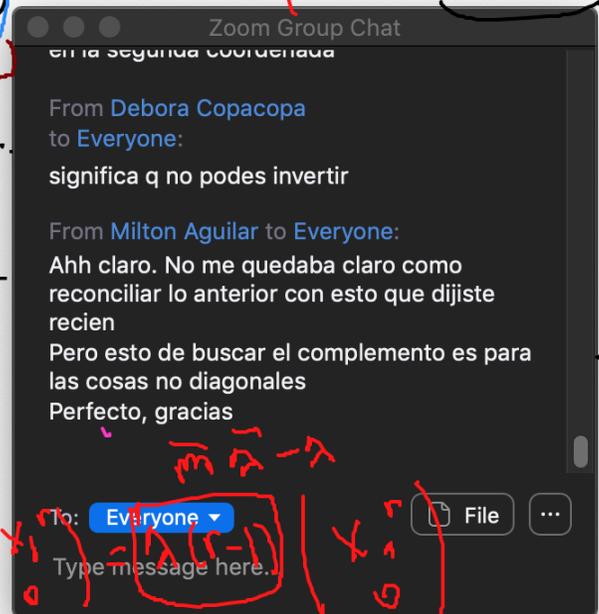
$$L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(r-1)x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Dh_r = \begin{pmatrix} r x_1^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Dh_r \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 x_1^{r_1-1} x_2^{r_2} & r_2 x_1^{r_1} x_2^{r_2-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$



- Que es a lo que habíamos llegado antes usando la notación reducida.
- Pro de repasar cómo hacerlo de esta manera: sirve para cuando A no es diagonal!

Encarado de otra manera.... (ejemplo c/

$$h_r = \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_1^r \end{pmatrix}$$



- $L_{DF} h_r \equiv -(-Dh_r DFy + DFh_r)$

$$H = \begin{pmatrix} x_1^r & x_1^{r-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_1^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

$$Dh_r = \begin{pmatrix} rx_1^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_1^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{pmatrix} =$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} =$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(r-1)x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$

$$L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda(r-1) \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Que es a lo que habíamos llegado antes usando la notación
- Pro de repasar cómo hacerlo de esta manera: sirve para c

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Zoom Group Chat

From Debora Copacopa to Everyone:
ok
dale dale

From jose creso to Everyone:
si, porfa!
que decante

From Debora Copacopa to Everyone:
gracias!

To: Juan Doppler (Privately) [File] [More]

Type message here...

$$Dh_r = \begin{pmatrix} r_1 x_1^{r-1} & x_2^{r-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Encarado de otra manera.... (ejemplo c/1)

- $L_{DF}h_r \equiv -(-Dh_rDFy + DFh_r)$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_1^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} rx_1^{r-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ 2\lambda x_2 \end{pmatrix} =$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r\lambda x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} =$

- $L_{DF} \begin{pmatrix} x_1^r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(r-1)x_1^r \\ 0 \end{pmatrix}$

- Que es a lo que habíamos llegado antes usando la notación reducida.

- *Pro* de repasar cómo hacerlo de esta manera: sirve para cuando A no es diagonal!