# DNL/MCA 2020
# Práctica 17/06/2020
# Cátedra Mindlin

Orador hoy: Santiago Boari

# Mapas (1)

# Mapas

- Vamos a pasar a estudiar sistemas en los cuales la prescripción de la evolución temporal *es a tiempos discretos*.

- $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \boldsymbol{x}_{n+1} = f(\boldsymbol{x}_n)$

- Al estudiar mapas, también encontraremos que tienen puntos fijos, cuando $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$

# Mapas lineales

$$x_{n+1} = Ax_n$$

- Para cualquier mapa lineal, el **origen es un punto fijo** (como teníamos para sistemas lineales) **.**

- Si miramos los autovalores y autovectores de esta matriz A: $Av_i = \lambda_i v_i$

- Notemos que la evolución temporal de un punto sobre la variedad lineal $v_i$ quedará contenida en ella: $A^n v_i = \lambda_i^n v_i$.

- La convergencia o divergencia al punto fijo está definida por el módulo (ya no el signo) del autovalor. Si $|\boldsymbol{\lambda_i}| > \mathbf{1}$, el autovector definirá una variedad inestable. Si $|\boldsymbol{\lambda_i}| < \mathbf{1}$, el autovector definirá una variedad estable, y si $|\boldsymbol{\lambda_i}| = \mathbf{1}$, el autovector definirá una variedad central.

# Mapas lineales

$$x_{n+1} = Ax_n$$

- Dada la discretización, ahora no tendremos *trayectorias continuas*, como teníamos antes. A pesar de la prescripción determinista, esto tiene serias consecuencias.

- Veámoslo con un ejemplo 1D: $x_{n+1} = -0.5 * x_n$

$$x_1 = -0.5 * x_0$$

$$x_2 = -0.5 * x_1 = (-0.5)^2\, x_0$$

$$x_3 = -0.5 * x_2 = (-0.5)^3\, x_0$$

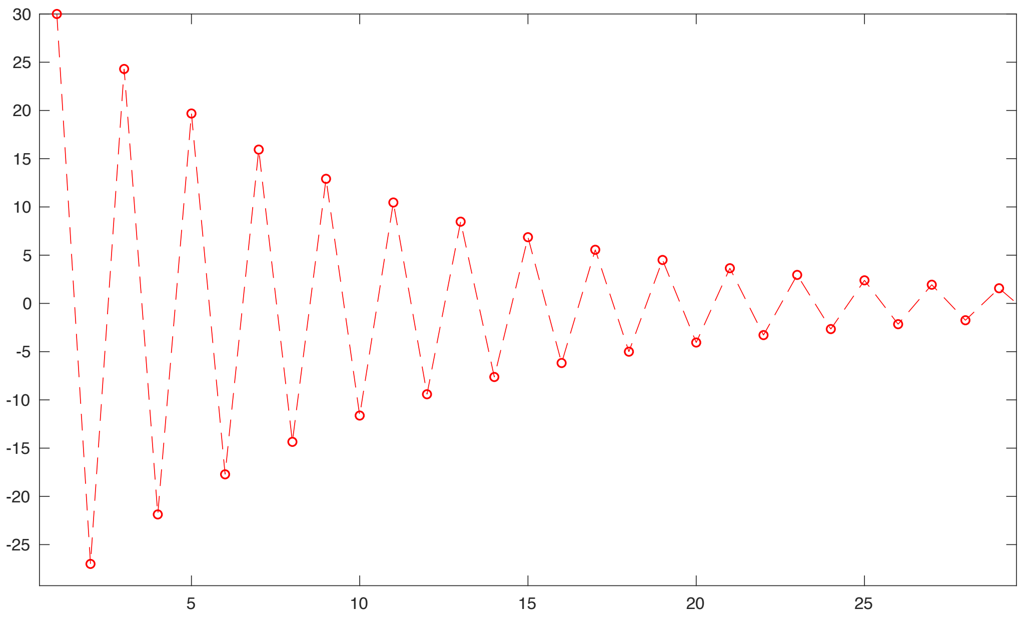
$$x_{\mathrm{n+1}} = -0.5 * x_n = (-1)^n\, (0.5)^n\, x_0$$

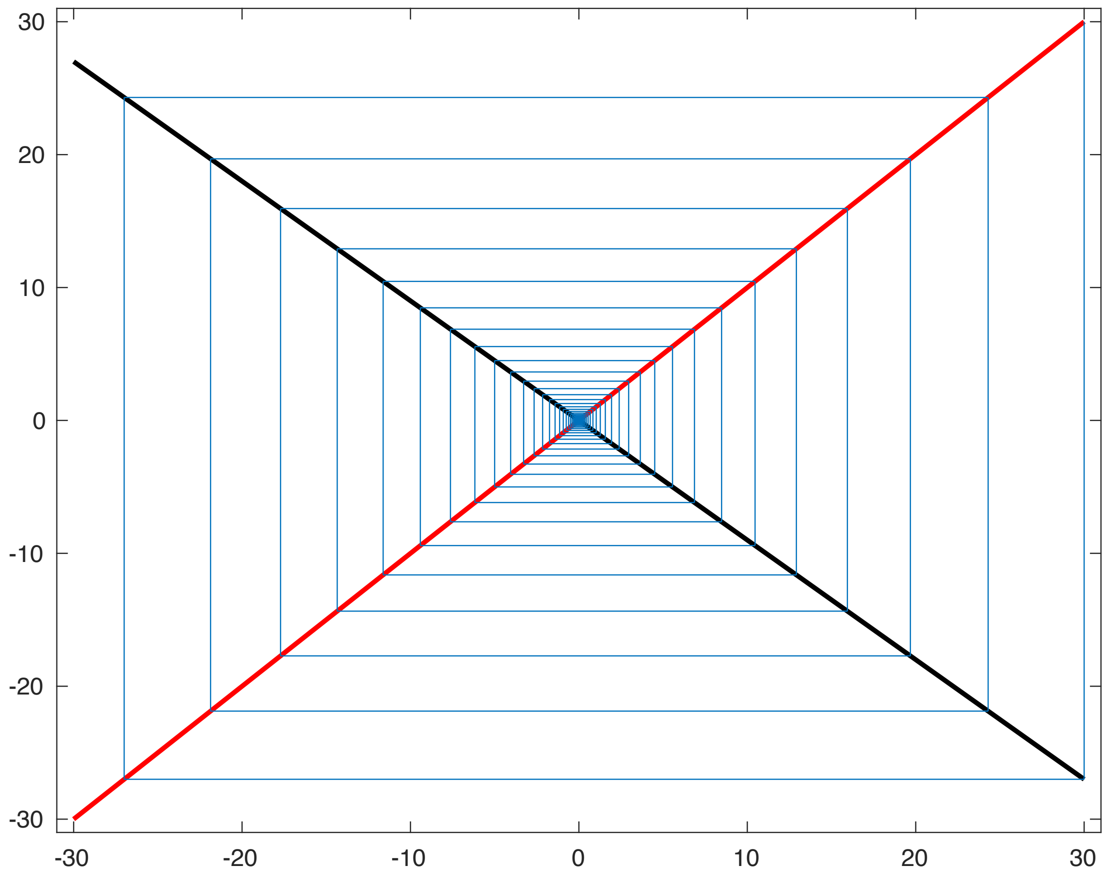
- **Podemos pasar de un lado al otro del punto fijo! Y tener oscilaciones en 1D!**

# Mapas lineales

$$x_{n+1} = -0.9 * x_n$$

$$x_{\mathrm{n+1}} = -0.9 * x_n = (-1)^n \, (0.9)^n \, x_0$$



# Mapas y puntos fijos

- Recuerden que para estabilidad valía linealización en una cercanía de puntos fijos *hiperbólicos*. ¿De qué manera puede un punto fijo ser *no hiperbólico* para mapas?

- 3 casos posibles:

- Autovalor de la linealización del mapa igual a 1 (equivalente a autovalor 0 en sistemas).
- Autovalor complejo tal que el modulo es igual a 1 (analogia con Hopf)
- Autovalor de la linealización del mapa igual a -1 (**no hay equivalente, vamos a ver un ejemplo de lo que pasa en este caso).**

# Mapas no lineales

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

- Sigue valiendo el teorema de linealización. Sólo que, como dijimos antes, lo que importará ahora es el ***modulo de los autovalores*** *para estudiar la estabilidad de los puntos fijos del mapa.*

Si tenemos un mapa, por ejemplo, 2D:

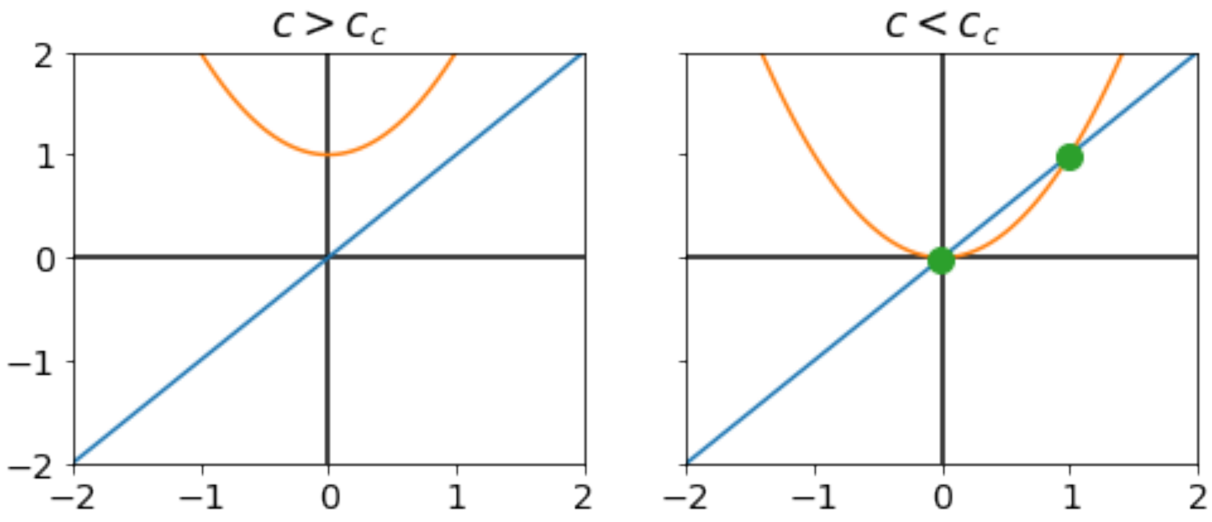
$$\begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \end{matrix}$$

El mapa linealizado será

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_x}{\partial x} & \frac{\partial f_x}{\partial y} \\ \frac{\partial f_y}{\partial x} & \frac{\partial f_y}{\partial y} \end{pmatrix}$$

# Mapas no lineales: el ejercicio de hoy

- $x_{n+1} = x_n^2 + c$



# Mapas no lineales: el ej

- $\overbrace{x_{n+1} = x_n^2 + c}^{f(x_n)}$

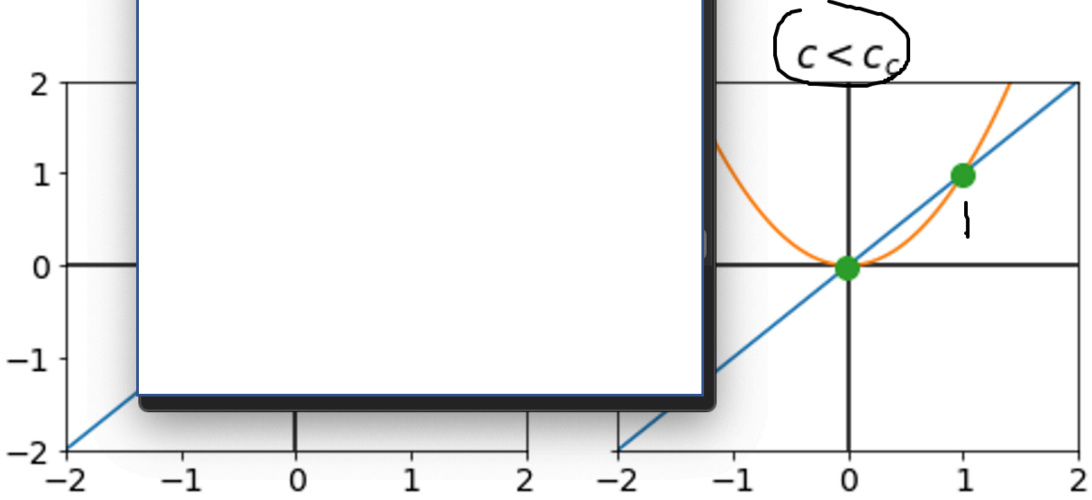
$X_{n+1} \approx f'(x_n^*)\, x_n$

i) pf $\quad X_{n+1} = X_n^2 + c = X_n$

$X_n^2 - X_n + c = 0$

$X_n^* = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$

$\boxed{c = 1/4 \to \text{bif SN}}$ $\quad c < 1/4 \to 2$ pf




$\boxed{c = -3/4}$

ii) estabilidad $\quad |f'(x_n)| = 2 x_n$

$\to f'(x_+^*) = 1 + \sqrt{1-4c} \to$ siempre > 1 $\to$ repulsor

$\to f'(x_-^*) = 1 - \sqrt{1-4c} \to < 1$

0 $\quad c = 0$

<0 $\quad c < 0$

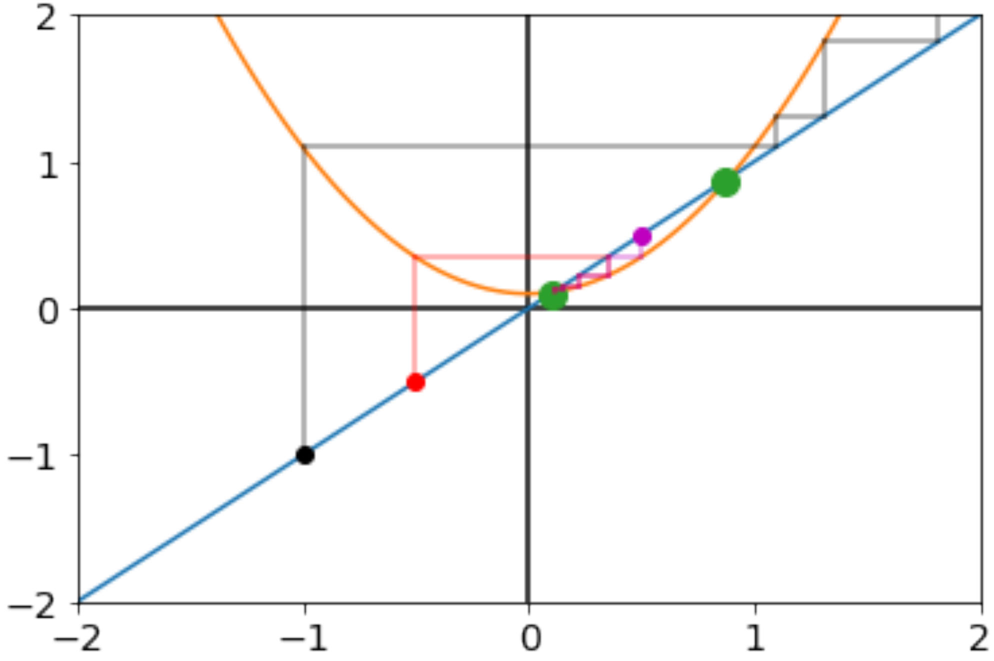
$\to$ (-1) $\quad -1 = +1 - \sqrt{1-4c}$

$+2 = +\sqrt{1-4c}$

$4 = 1-4c$

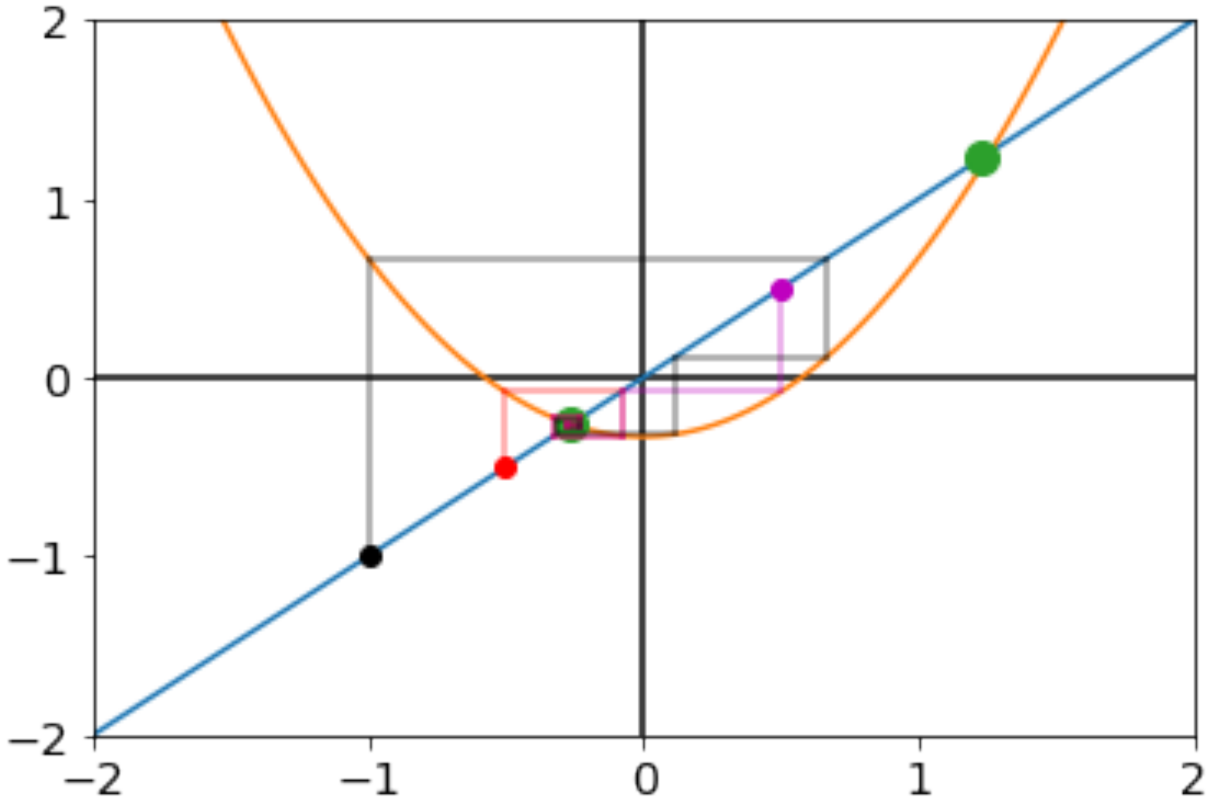
# Mapas no lineales: el ejercicio de hoy

- $f'(x_-^*) > 0$



# Mapas no lineales: el ejercicio de hoy

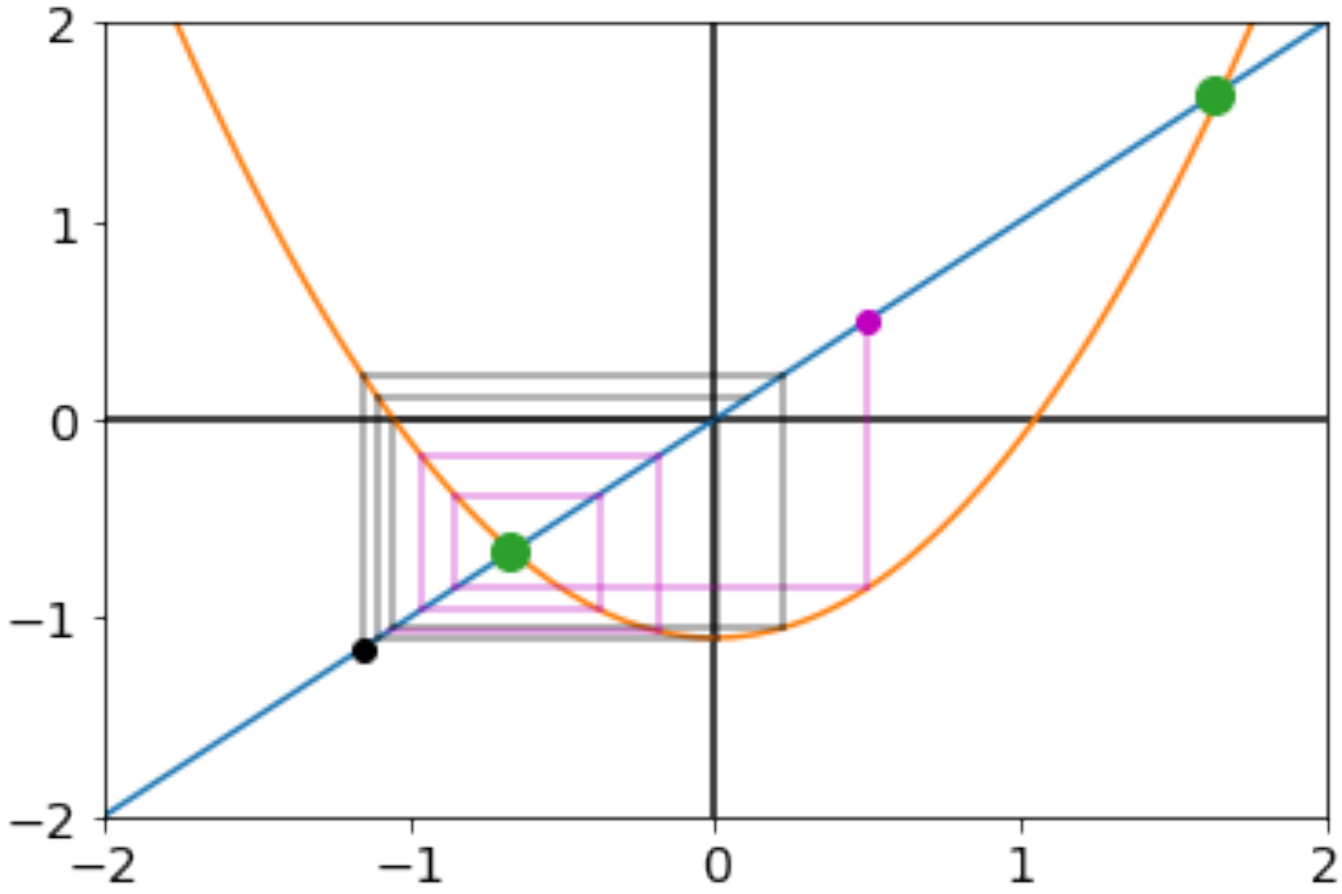
- Cuando $-1 < f'(x_-^*) < 0$
- El punto es un atractor



# Mapas no lineales: el ejercicio de hoy

- Cuando $f'(x_-^*) < -1$

- ¿Qué está pasando?



# Mapas no lineales: el ejercicio de hoy

- $\acute{O}rbitas\ de\ orden\ superior$: $f^k(x) = f(f(\ldots.(x)\ldots) = x$

You are screen sharing | Stop Share

Mouse | Select | Text | Draw | Stamp | Spotlight | Eraser | Format | Undo | Redo | Clear | Save

# Mapas no lineales: el ejercicio de l

$X_{n+1} = X_n^2 + c$

- *Órbitas de orden superior*: $f^k(x) = f(f(\ldots(x)$

$c = -\frac{3}{4}$ $\boxed{X_{n+1} = X_n}$ Periodo 1

$f^2(x) = x^4 + 2cx^2 + c^2 + c$

$(f^2(x))' = 4x^3 + 4cx = 4x(x^2+c) = 4X_{2+}X_{2-} = 4\left(\frac{-1+\sqrt{1-4(c+1)}}{2}\right)\left(\frac{-1-\sqrt{1-4(c+1)}}{2}\right)$

$(f^2(x))' = 4(c+1) < 1$ $c < 1/4$, $c < -3/4$

$\cancel{4x}\,4(c+1)$

Peero .... $-1 = 4(c+1) \rightarrow \boxed{c = -5/4}$ Otra duplicación de p.

$X^*_{2\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4(c+1)}}{2}$

$f(X_{2+}) = X_{2-}$
$f(X_{2-}) = X_{2+}$

Talking: Santiago Boari

From maia brodiano to Everyone:
-1+4*(c+1)

From Julian to Everyone:
si

From Julia to Everyone:
si

From Julian to Everyone:
o sea se desencadena esta cosa medio fractaloide que decías antes

$f'(x^*) = 1 - \sqrt{1-4c}$ $-1$ $c = -\frac{3}{4}$

To: Everyone | File

Type message here...

# Mapas no lineales: el ejercicio de hoy

- $\acute{O}rbitas\ de\ orden\ superior: f^k(x) = f(f(\ldots.(x)\ldots)) =$