Variedad central

Dinámica no lineal
Cátedra G. Mindlin
Viernes 29 de Mayo 2020

El plan de hoy

- Repaso variedad central
- Un problema
- Consultas

Idea

Un problema

Reducir la dimensión

Reducir las no linealidades

Idea

Un problema

Reducir la dimensión

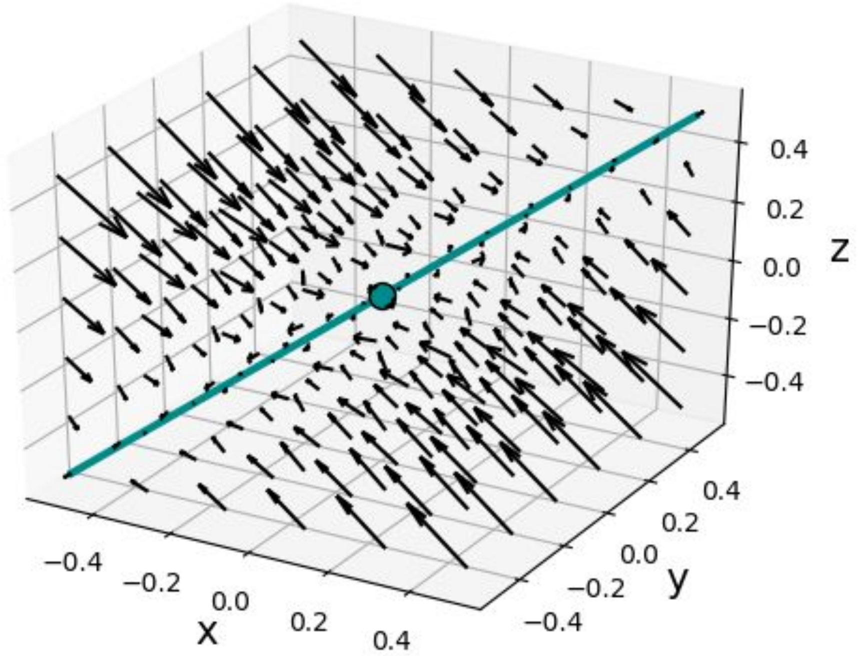
Reducir las no linealidades

Repaso

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y + z + y^2 z$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + z + x z^2$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y - 2z + x^2 y$$

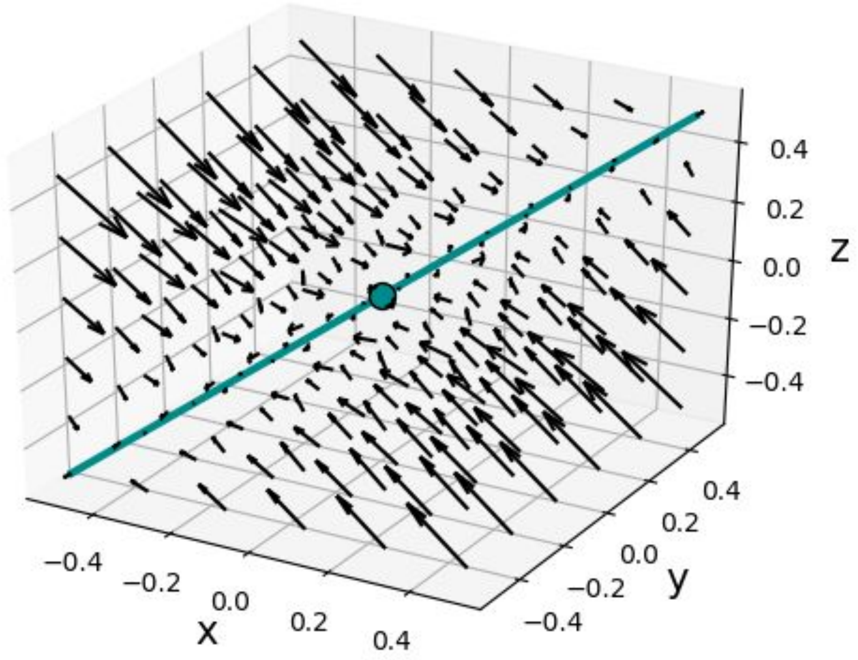
Repaso

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y + z + y^2 z$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + z + x z^2$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y - 2z + x^2 y$$



Repaso

$$\frac{dx}{dt} = -2x + y + z + y^2 z$$
$$\frac{dy}{dt} = x - 2y + z + x z^2$$
$$\frac{dz}{dt} = x + y - 2z + x^2 y$$



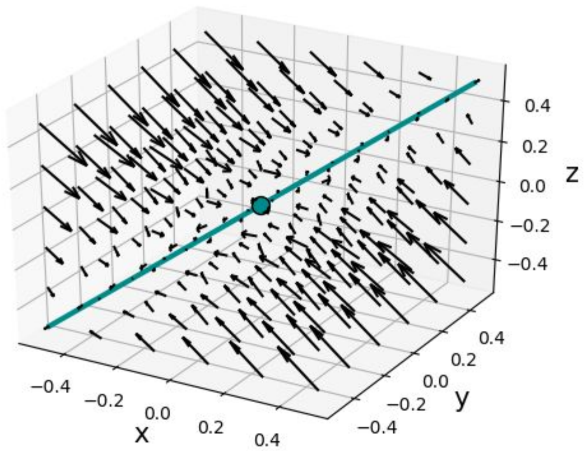
Si linealizamos en el punto fijo (0,0,0):

$$\lambda_1 = -3 \quad ; \quad v_1 = (-1, 0, 1)$$
$$\lambda_2 = -3 \quad ; \quad v_2 = (-1, 1, 0)$$
$$\boxed{\lambda_3 = 0 \quad ; \quad v_3 = (1, 1, 1)}$$

Tenemos dos direcciones estables y una “central”.

¿Qué vimos en el ejemplo?

- Un sistema 3d converge, cerca del punto fijo, a una curva (1d).
- Esta curva está bien aproximada, muy, muy, cerca del origen por la dirección del autovector “central”.



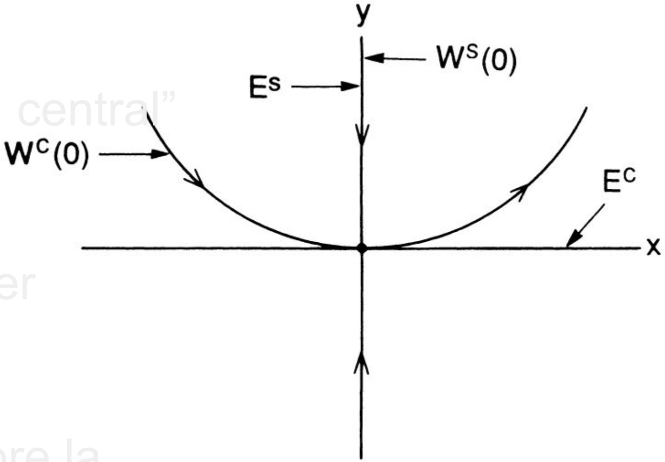
¿Cuándo existe la variedad central?

¿Cómo podemos encontrar la variedad central?

¿Qué pasa en el entorno del punto fijo?

Teoremas a trazo (muy) grueso:

Teo 1: Para un problema, formulado razonablemente, en el que hay un punto fijo no hiperbólico (Re(autoval)=0), **existe** la variedad central.



Teo 2: La variedad central es tangente a la “variedad central” del problema lineal (Ec), en el punto fijo.

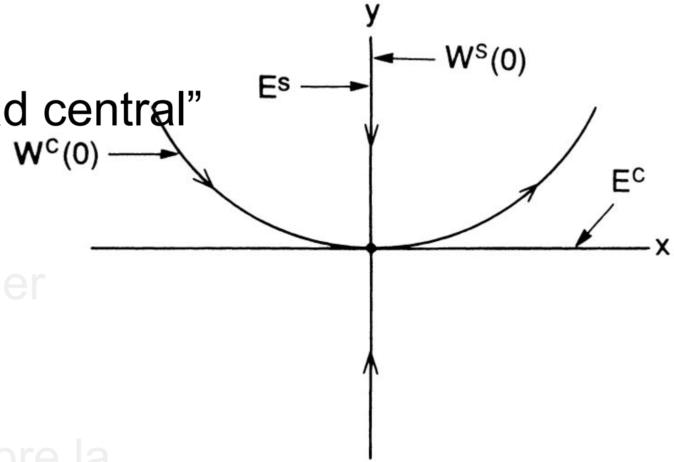
Teo 3: La variedad central es aproximable, a cualquier precisión, por suma de monomios.

Teo4: Tendremos una buena idea de la dinámica sobre la variedad central, al estudiar la dinámica de las variables “centrales” habiendo evaluado las “no centrales” sobre la variedad.

Teoremas a trazo (muy) grueso:

Teo 1: Para un problema, formulado razonablemente, en el que hay un punto fijo no hiperbólico (Re(autoval)=0), **existe** la variedad central.

Teo 2: La variedad central **es tangente** a la “variedad central” del problema lineal (Ec), en el punto fijo.



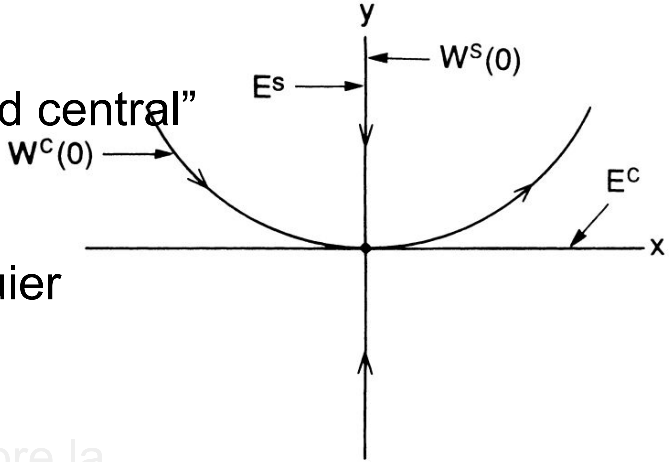
Teo 3: La variedad central es aproximable, a cualquier precisión, por suma de monomios.

Teo4: Tendremos una buena idea de la dinámica sobre la variedad central, al estudiar la dinámica de las variables “centrales” habiendo evaluado las “no centrales” sobre la variedad.

Teoremas a trazo (muy) grueso:

Teo 1: Para un problema, formulado razonablemente, en el que hay un punto fijo no hiperbólico (Re(autoval)=0), **existe** la variedad central.

Teo 2: La variedad central **es tangente** a la "variedad central" del problema lineal (Ec), en el punto fijo.

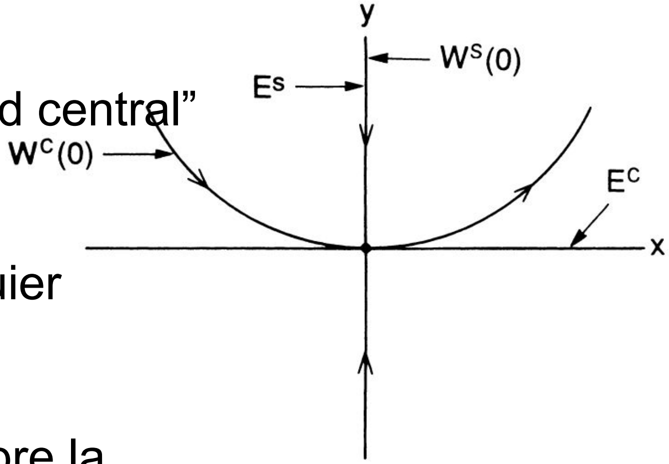


Teo 3: La variedad central es **aproximable**, a cualquier precisión, por suma de monomios.

Teo4: Tendremos una buena idea de la dinámica sobre la variedad central, al estudiar la dinámica de las variables "centrales" habiendo evaluado las "no centrales" sobre la variedad.

Teoremas a trazo (muy) grueso:

Teo 1: Para un problema, formulado razonablemente, en el que hay un punto fijo no hiperbólico (Re(autoval)=0), **existe** la variedad central.



Teo 2: La variedad central **es tangente** a la “variedad central” del problema lineal (Ec), en el punto fijo.

Teo 3: La variedad central es **aproximable**, a cualquier precisión, por suma de monomios.

Teo4: Tendremos una buena idea de la dinámica sobre la variedad central, al estudiar la dinámica de las variables “centrales” habiendo evaluado las “no centrales” sobre la variedad.

Estrategia

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + x^2 y \\ \dot{y} = 3x + 4y + xy \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2 y \\ xy \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

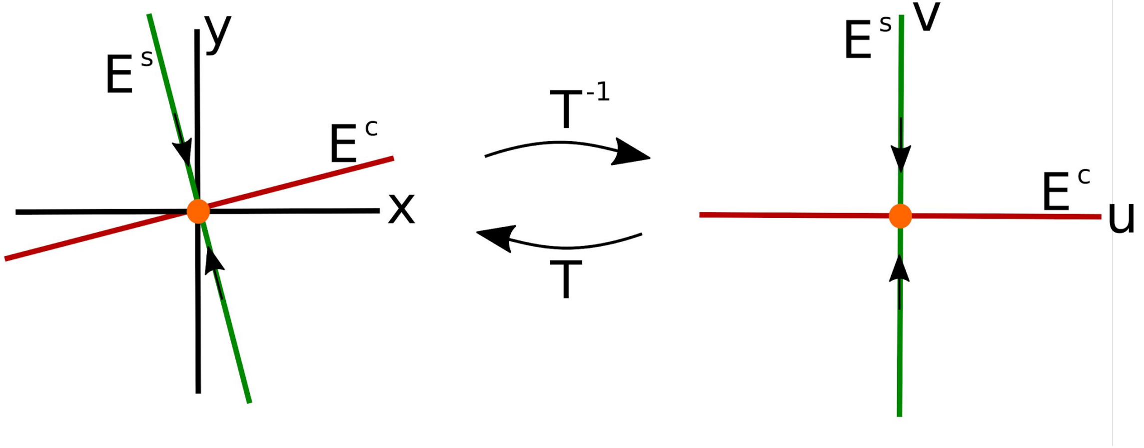
Parte lineal
(A es el Jacobiano)

Parte no lineal

1. Ver si el punto fijo está en el origen, sino trasladarlo.

2. Linealizar. Obtener autovalores y autovectores.

Estrategia



3. Si el Jacobiano no es diagonal, diagonalizarlo. Reescribir el sistema en las nuevas variables.

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f(x(u,v), y(u,v)) \\ g(x(u,v), y(u,v)) \end{pmatrix}$$

Estrategia

4. Buscamos la variedad central: Si u es la variable “central”, proponer una expansión:

$$v = K(u) = au^2 + bu^3 + o(4)$$

- Pasa por el punto fijo
- Al empezar en términos cuadráticos, nos aseguramos que es tangente a Ec (el eje horizontal).

Pedimos que sea invariante ante la dinámica. La curva debe ser tangente al campo vector.

Estrategia

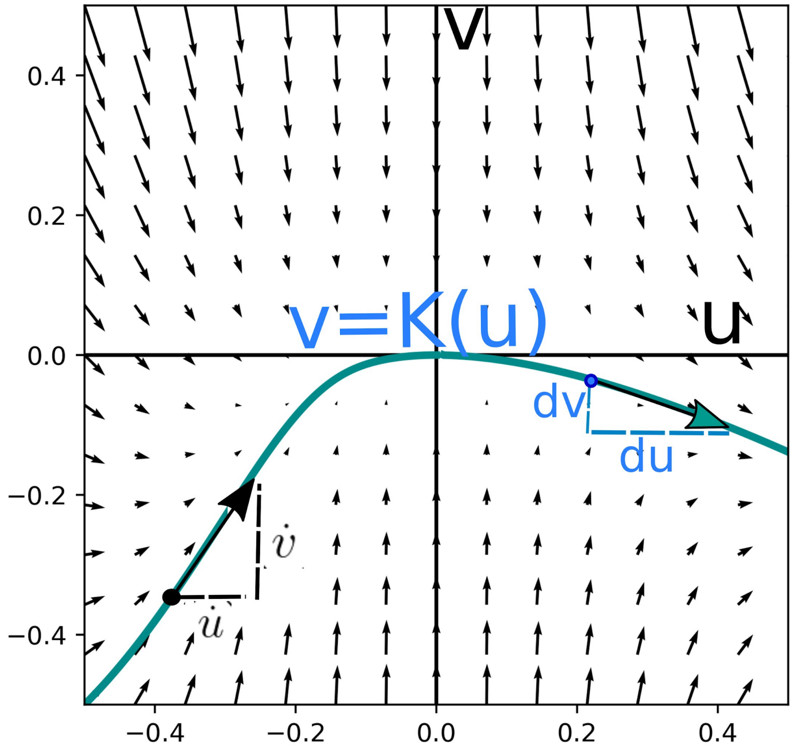
$$\frac{\dot{v}}{\dot{u}}\Big|_{v=K(u)} = \frac{dv}{du}\Big|_{v=K(u)}$$

$$\boxed{\dot{v}\,\Big|_{v=K(u)} = \frac{dK}{du}\dot{u}\,\Big|_{v=K(u)}}$$

Ecuación de v, donde dice v ponemos K(u)

Derivada de nuestra expansión

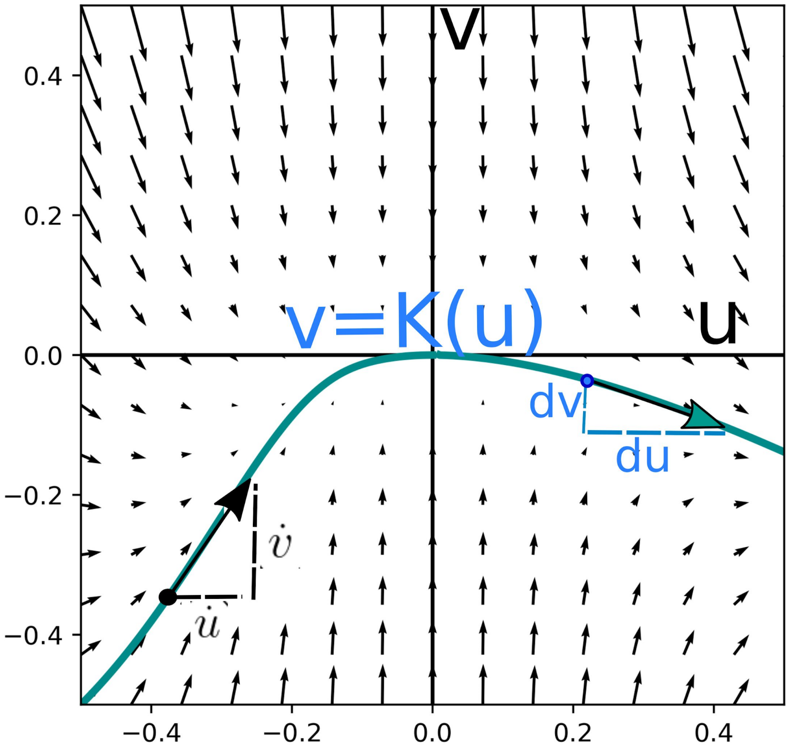
Ecuación de u, donde dice v ponemos K(u)



Estrategia

$$\frac{\dot{v}}{\dot{u}}\Big|_{v=K(u)} = \frac{dv}{du}\Big|_{v=K(u)}$$

$$\boxed{\dot{v}\,\Big|_{v=K(u)} = \frac{dK}{du}\dot{u}\,\Big|_{v=K(u)}}$$



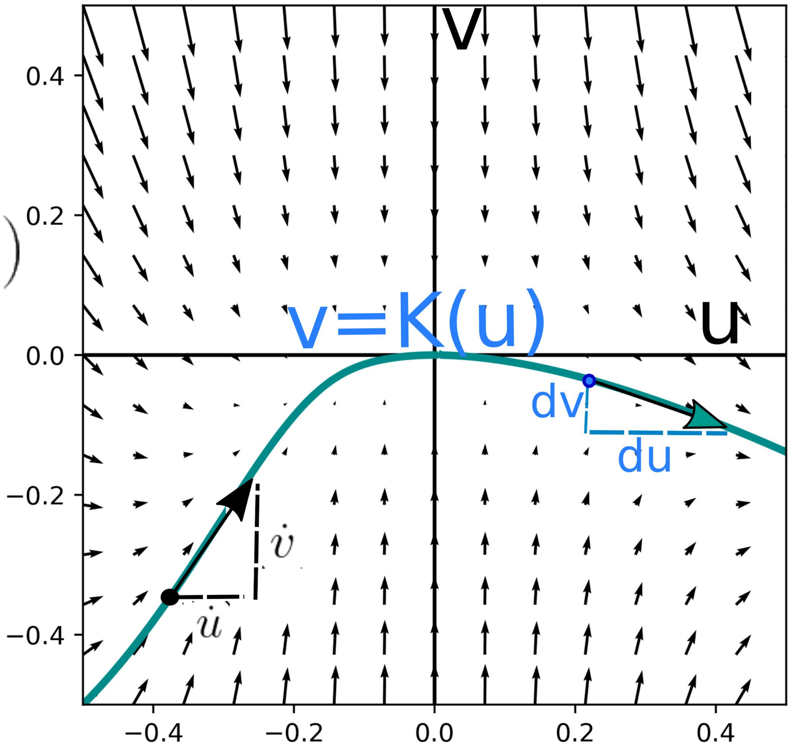
De acá sacamos los coeficientes que propusimos en la expansión (a, b, c…)

Ojo: ser cuidadosa/o con los ordenes

Estrategia

5. Teniendo K(u) hacemos la reducción a la variedad central:

$$\dot{u}\mid_{v=K(u)} = \tilde{f}\mid_{v=K(u)} = \tilde{f}(u, K(u))$$



1. Estudie la dinámica cerca del origen de los siguientes sistemas. Dibuje los retratos de fases, y calcule la variedad central y la dinámica sobre ella. Diga si el origen es estable o inestable.

(a)

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x^2 \\ \dot{y} &= -y - x^2 \end{aligned} \tag{1}$$

(b) (*)

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned} \tag{2}$$

G5 - Ej1b

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta\end{aligned}}$$

G5 - Ej1b

$$\dot{\theta} = -\theta + v^2$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

Los puntos fijos son: $\left\{(0,0), (n\pi, \sqrt{n\pi},)\right\}$

Linealizamos

G5 - Ej1b

$$\dot{\theta} = -\theta + v^2$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

Los puntos fijos son: $\{(0,0),(n\pi,\sqrt{n\pi},)\}$

Linealizamos

$$J(\theta,v) = \begin{pmatrix} -1 & 2v \\ -cos\theta & 0 \end{pmatrix} \mapsto J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores

G5 - Ej1b

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta\end{aligned}}$$

Los puntos fijos son: $\{(0,0),(n\pi,\sqrt{n\pi},)\}$

Linealizamos

$$J(\theta,v) = \begin{pmatrix} -1 & 2v \\ -cos\theta & 0 \end{pmatrix} \mapsto J(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Autovalores :

$$\lambda_\pm = -\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

Autovectores:

Autovectores:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \mapsto v_x = 0$$

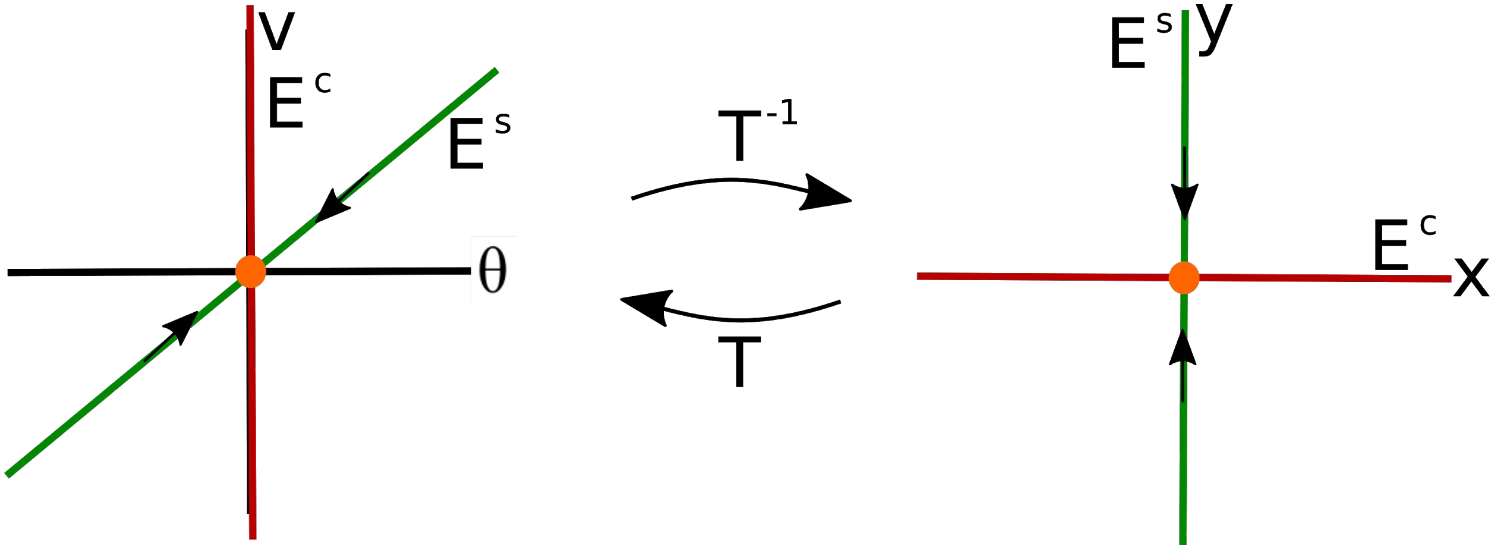
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} x \mapsto -v_x + v_y = 0$$

$$\lambda_c = 0 \quad ; \quad \overline{v}_c = (0\ ,\ 1)$$

$$\lambda_s = -1 \quad ; \quad \overline{v}_s = (1\ ,\ 1)$$

$$\lambda_c = 0 \quad ; \quad \bar{v}_c = (0\ ,\ 1) \qquad\qquad \lambda_c = 0 \quad ; \quad \bar{v}_c = (1\ ,\ 0)$$

$$\lambda_s = -1 \quad ; \quad \bar{v}_s = (1\ ,\ 1) \qquad\qquad \lambda_s = -1 \quad ; \quad \bar{v}_s = (0\ ,\ 1)$$



Recordemos cómo transformar

$$\dot{\theta} = -\theta + v^2$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

Reescribamos el sistema:

$$\dot{v} = -sin(\theta) = -\theta + \theta^3/6 - \theta^5/5! + ...$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^2 \\ \frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots \end{pmatrix}$$

Armamos las matrices de cambio de base:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos cómo transformar

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; T^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Las nuevas variables van a ser:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x = -\theta + v \\ y = \theta \end{cases}$$

Y las viejas en término de las nuevas:

$$\begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} \theta = y \\ v = x + y \end{cases}$$

¿Y cómo transforma el sistema?

Recordemos cómo transformar

$$\dot{\theta} = -\theta + v^2$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^2 \\ \frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \ldots \end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\theta}} = J\vec{\theta} + \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Recordemos cómo transformar

$$\dot{\theta} = -\theta + v^2$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{v}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta\\ v\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v^2 \\ \frac{1}{3!}\theta^3 - \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\theta}} = J\vec{\theta} + \begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$

$$\dot{\vec{\theta}} = JTT^{-1}\vec{\theta} + \begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$

$$T^{-1}\dot{\vec{\theta}} = (T^{-1}JT)T^{-1}\vec{\theta} + T^{-1}\begin{pmatrix}f\\ g\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\dot{\vec{x}} = D\vec{x} + \begin{pmatrix}\tilde{f}\\ \tilde{g}\end{pmatrix}}$$

Recordemos cómo transformar

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f(\theta(x,y), v(x,y)) \\ g(\theta(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned}}$$

Recordemos cómo transformar

$$\dot{\theta} = -\theta + v^2$$

$$\dot{v} = -\sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + T^{-1} \begin{pmatrix} f(\theta(x,y), v(x,y)) \\ g(\theta(x,y), v(x,y)) \end{pmatrix}$$

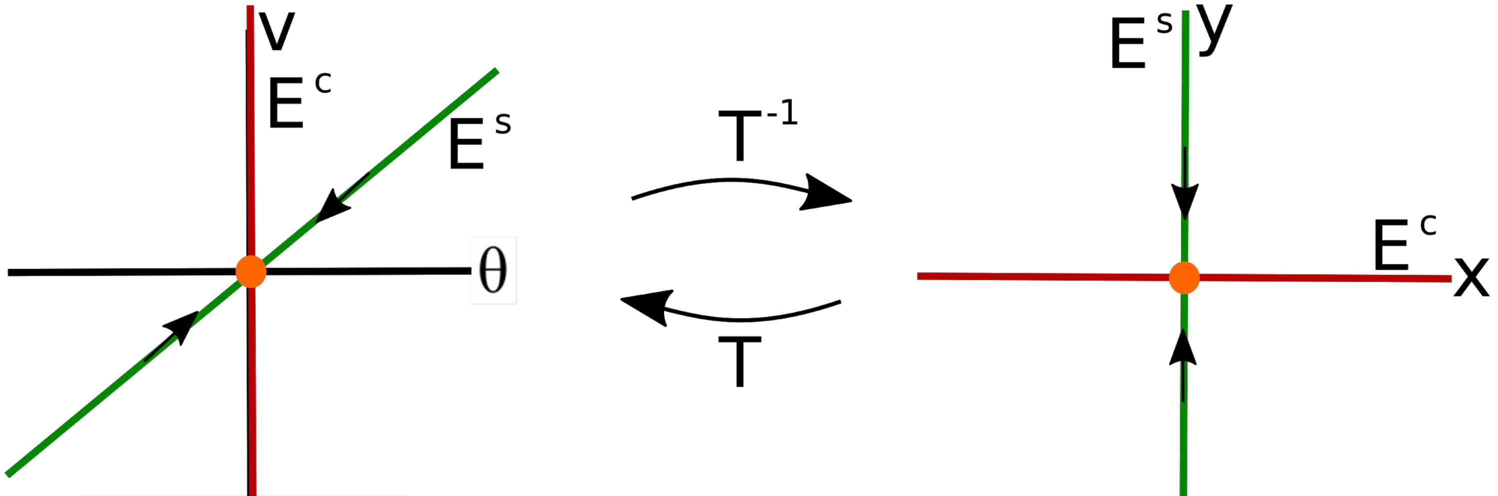
$$T^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f + g \\ f \end{pmatrix}$$

$$T^{-1} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v^2 + \frac{1}{3!}\theta^3 - \dots \\ v^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ (x+y)^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ (x+y)^2 \end{pmatrix}}$$

$$\lambda_c = 0 \quad ; \quad \overline{v}_c = (0\ ,\ 1) \qquad\qquad \lambda_c = 0 \quad ; \quad \overline{v}_c = (1\ ,\ 0)$$

$$\lambda_s = -1 \quad ; \quad \overline{v}_s = (1\ ,\ 1) \qquad\qquad \lambda_s = -1 \quad ; \quad \overline{v}_s = (0\ ,\ 1)$$



$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\theta} &= -\theta + v^2 \\ \dot{v} &= -\sin\theta \end{aligned}}$$

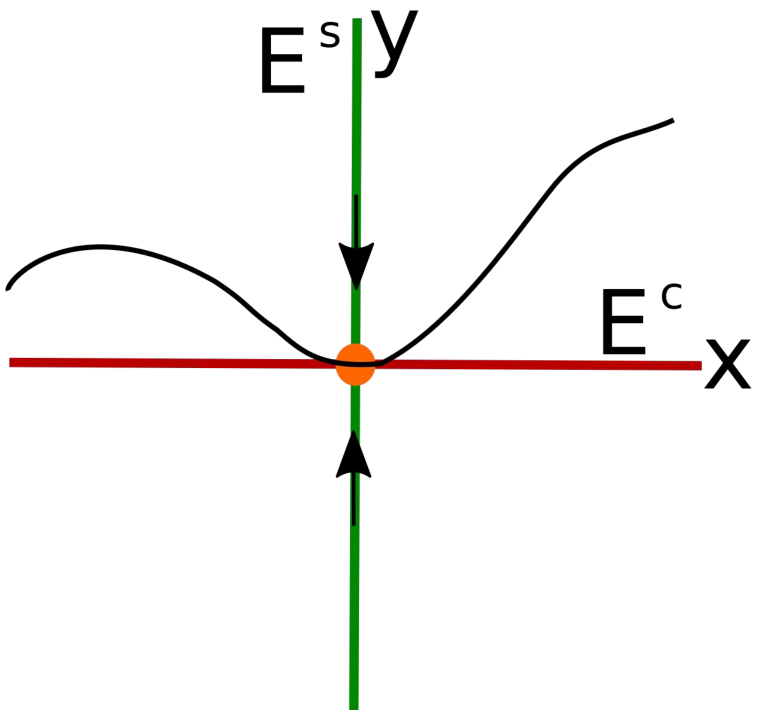
$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \ldots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

¿Qué hicimos hasta ahora?

1. Vimos que (0,0) es pf. Linealizamos y encontramos autovalores y autovectores. Tenemos un autovalor nulo y uno negativo.

2. Cambiamos coordenadas $(\theta, v) \mapsto (x, y)$ para que los autovectores esten en los ejes.

3. Busquemos la variedad central y veamos la dinámica sobre ella.



Buscamos la variedad central

Sabemos que es expresable como y = K(x). Busquemos

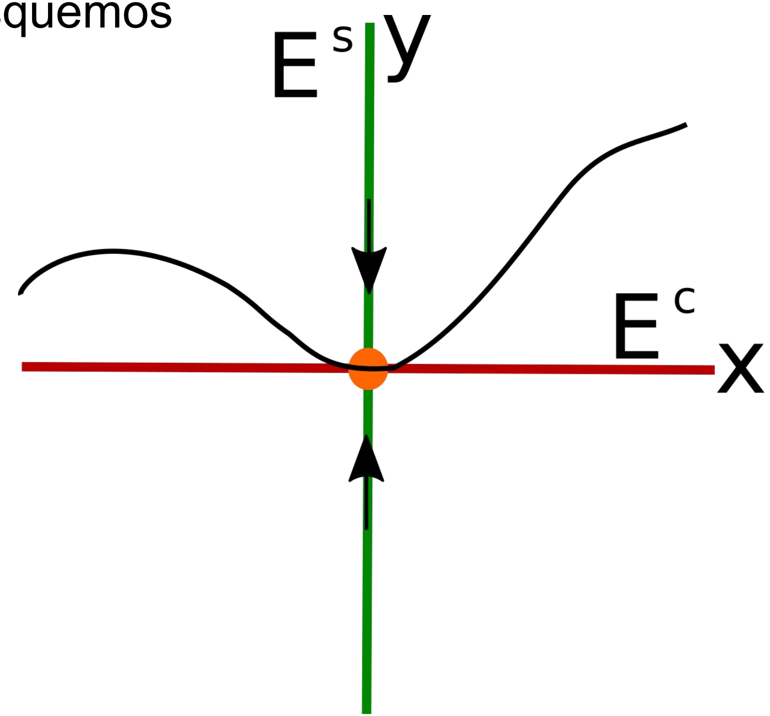
una expansión en potencias:

$$y(x) = K(x) = ax^2 + bx^3 + o(x^4)$$

Esta propuesta cumple que: $\begin{cases} K(0) = 0 \\ \frac{dK}{dx}(0) = 0 \end{cases}$

Planteamos que sea invariante ante la dinámica

$$\dot{y}|_{y=K(x)} = \frac{d}{dt}(\,K(x)\,) = \frac{dK}{dx}\dot{x}|_{y=K(x)}$$



Buscamos la variedad central

$$\boxed{\dot{y}\Big|_{y=K(x)}} = \frac{d}{dt}(\ K(x)\ ) = \frac{dK}{dx}\dot{x}\Big|_{y=K(x)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \ldots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

Buscamos la variedad central

$$\boxed{\dot{y}|_{y=K(x)}} = \frac{d}{dt}(\,K(x)\,) = \frac{dK}{dx}\boxed{\dot{x}|_{y=K(x)}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\dot{y}|_{y=K(x)} = -K + (x+K)^2 = -a\,x^2 - b\,x^3 + (x^2 + 2xK + K^2)$$

$$\dot{y}|_{y=K(x)} = (1-a)\,x^2 + (2a-b)\,x^3$$

Buscamos la variedad central

$$\boxed{\dot{y}|_{y=K(x)}} = \frac{d}{dt}(\, K(x) \,) = \frac{dK}{dx}\boxed{\dot{x}|_{y=K(x)}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\dot{x}\;|_{y=K(x)} = \left(-(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 + \dots\right)|_{y=K(x)}$$

$$\dot{x}\;|_{y=K(x)} = -(x+K)^2 + \frac{1}{3!}K^3$$

$$\dot{x}\;|_{y=K(x)} = -x^2 - 2xK - K^2 + \frac{1}{3!}K^3$$

$$\dot{x}\;|_{y=K(x)} = -x^2 - 2ax^3 + o(4)$$

Buscamos la variedad central

$$\boxed{\dot{y}|_{y=K(x)}} = \frac{d}{dt}(\ K(x)\ ) = \frac{dK}{dx}\boxed{\dot{x}|_{y=K(x)}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\dot{x}\ |_{y=K(x)} = -x^2 - 2xK - K^2 + \frac{1}{3!}K^3$$

$$\boxed{\frac{dK}{dx}}\boxed{\dot{x}|_{y=K(x)}} = (\ 2ax + 3b\,x^2\ + o(x^3)\ )\,(-(x+K)^2 + K^3/6 - \dots)$$

$$\frac{dK}{dx}\dot{x}|_{y=K(x)} = -\ 2ax^3$$

Buscamos la variedad central

$$\dot{y}\big|_{y=K(x)} = \frac{d}{dt}(\ K(x)\ ) = \frac{dK}{dx}\dot{x}\big|_{y=K(x)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

Finalmente, juntando todo:

$$(1-a)x^2 + (2a-b)x^3 + o(4) = -2ax^3 + o(4)$$

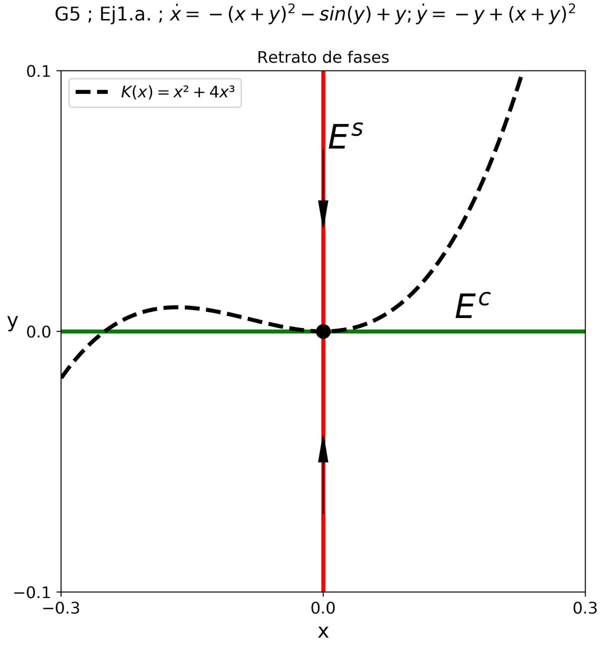
$$(1-a)x^2 + (4a-b)x^3 + o(4) = 0$$

$$\boxed{K(x) = x^2 + 4\,x^3 \ + o(x^4)}$$

Dinámica sobre la variedad central

$$\boxed{K(x) = x^2 + 4\,x^3 + o(x^4)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \dots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$



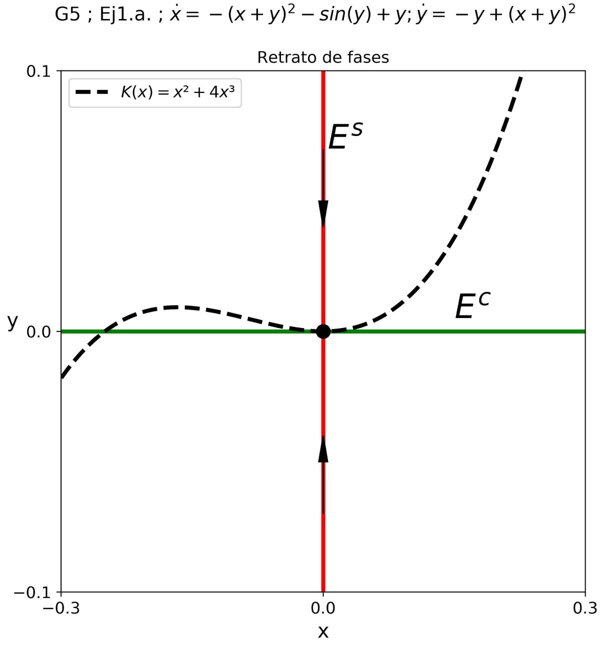
Dinámica sobre la variedad central

$$\boxed{K(x) = x^2 + 4\,x^3 \ + o(x^4)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \ldots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

$$\dot{x}\ |_{y=K(x)} = -x^2 - 2ax^3 + o(4)$$

$$\dot{x}|_{y=K(x)} =- x^2 - 2x^3$$

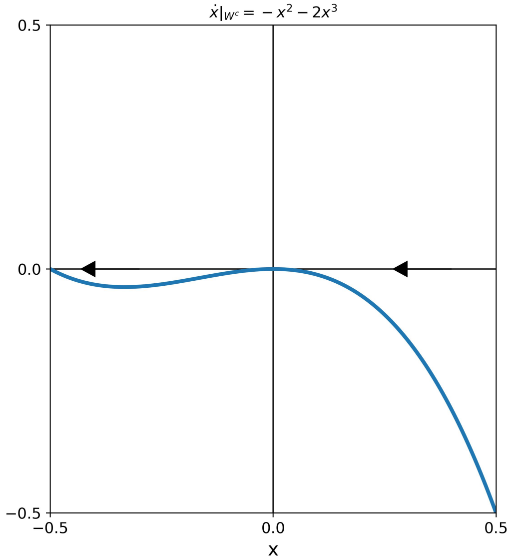


Dinámica sobre la variedad central

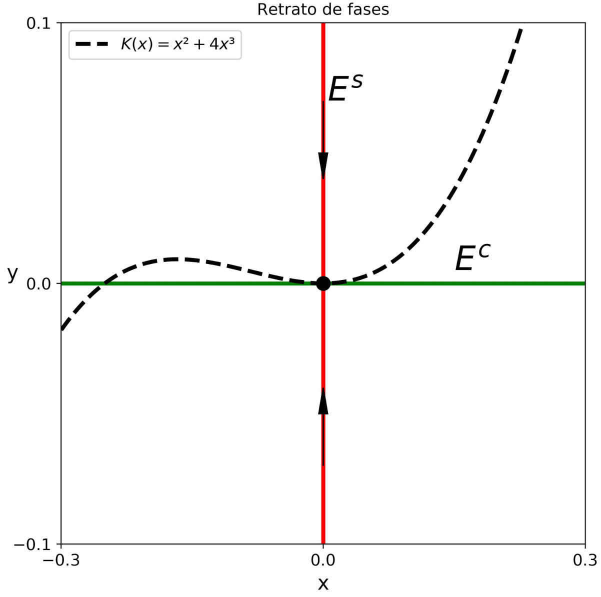
$$\boxed{K(x) = x^2 + 4\,x^3 \ + o(x^4)}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = -(x+y)^2 + \frac{1}{3!}y^3 - \ldots \\ \dot{y} = -y + (x+y)^2 \end{cases}$$

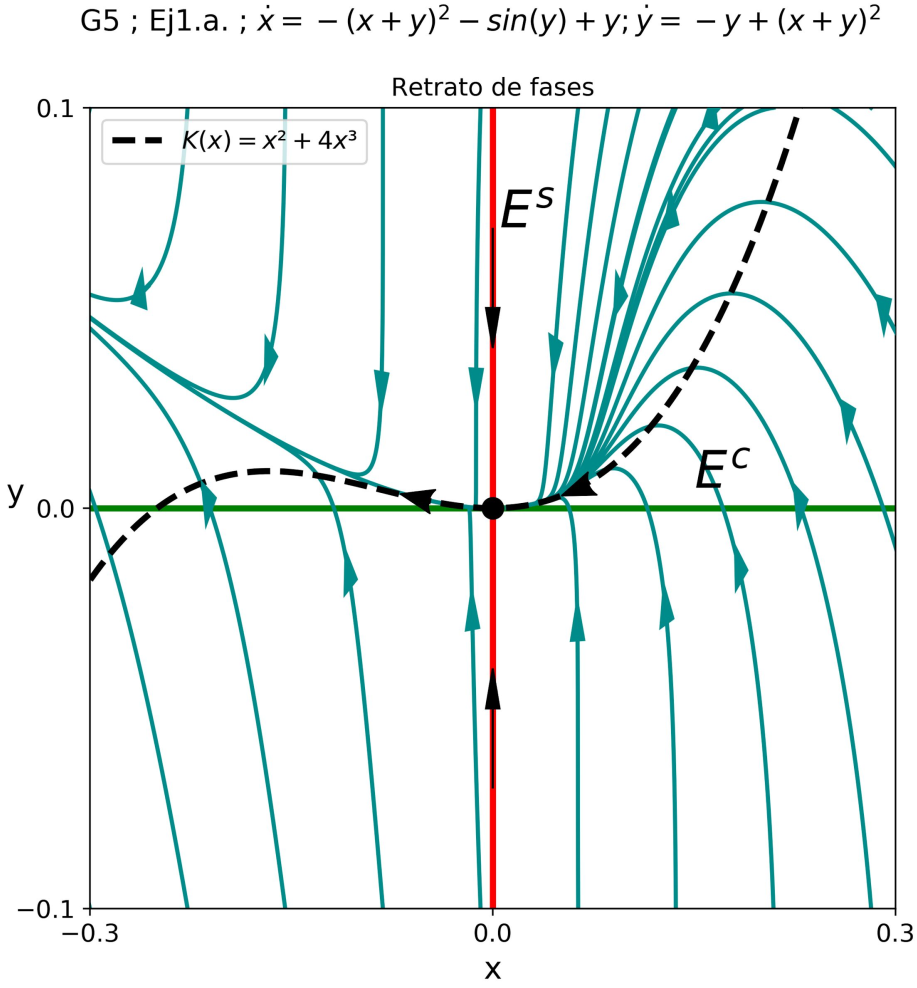
$$\dot{x}\big|_{y=K(x)} = -x^2 - 2x^3$$



G5 ; Ej1.a. ; $\dot{x} = -(x+y)^2 - sin(y) + y; \dot{y} = -y + (x+y)^2$



Retrato de fases



Comentarios finales

1. La forma en que pedimos que nuestra aproximación a la variedad central K sea tangente al campo vector es equivalente al método del libro de Gabriel.

   Si Ac es la variable “central” y As la “estable, en el problema que resolvimos serían x e y, respectivamente.

$$A^s = G(A^c) \rightarrow \frac{dA^s}{dt} = DG(A^c)\frac{dA^c}{dt}$$ ← Libro

$$\dot{y}\big|_{y=K(x)} = \frac{d}{dt}(\ K(x)\ ) = \frac{dK}{dx}\dot{x}\big|_{y=K(x)}$$ ← Hoy

Comentarios finales

2. Al igual que en las guías anteriores en que buscamos variedades invariantes de puntos fijos, la variedad central nos ordena el espacio de fases.

3. Si la dirección “no central” es inestable, los teoremas funcionan igual.

4. La variedad central es importante para entender bifurcaciones de puntos fijos, que vimos que ocurrían cuando el punto fijo era no hiperbólico.

5. Los teoremas son para entornos del punto fijo.

6. Libros