Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin - 1er cuatrimestre 2020
Tema: Mapas

Se tiene un oscilador no-lineal forzado periódicamente mediante la función $p(t)$:

$$\dot{z} = (1 + iw_0)z - z|z|^2 + i\varepsilon p(t)$$

Con $p(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \delta(t - nT)$. Note que esta ecuación es la forma normal de una bifurcación de Hopf a la que se añade una perturbación periódica de período T a la variable imaginaria del problema.

[Construcción del mapa]

a) Escriba las ecuaciones de evolución temporal para la amplitud (R) y fase (ϕ), usando que $z = Re^{i\phi}$.

b) Se quiere estudiar la dinámica del sistema forzado a partir de la construcción de un mapa para la evolución de las variables R y ϕ. Sabiendo que la solución a las ecuaciones escritas en (a) para la evolución entre los pulsos está dada por:

$$R(t) = \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{1 - R_0^2}{R_0^2})e^{-2t}}}$$

$$\phi(t) = \phi_0 + w_0 t$$

i) [Simplificación] Muestre que la parte radial es una perturbación que en la cercanía del pulso siguiente (R(T)) converge al caso R=1 (ciclo límite) si T>>1. En términos de un mapa, esto nos daría $R_{n+1} = 1$. Por esto nos concentraremos sólo en la evolución de la variable $\phi(t)$.

c) Sabiendo que la perturbación ocurre en la parte imaginaria, escriba la fase justo luego de un pulso del forzante (ϕ_+) en función de las variables justo antes (R_-, ϕ_-). Para esto, escriba $x_+ = x_-$ e $y_+ = y_- + \varepsilon$, con $x_- = Rcos(\phi)$ e $y_- = Rsen(\phi)$. Una vez escrito en cartesianas, busque su fase. Recuerde que: $\phi_z = tan^{-1}(\frac{y}{x})$.

   Muestre que $\phi_+ = tan^{-1}(\tan(\phi_-) + \varepsilon/(R_- \cos(\phi_-))$

d) La expresión hallada en c) puede simplificarse para el caso ε <<1.
   Muestre que en este caso $\phi_+ \approx \phi_- + \varepsilon \cos(\phi_-)$.

   [Ayuda]: use que la expansión en Taylor a orden 1 alrededor del 0 para la arcotangente viene dada por: $tan^{-1}\big(f(x)\big) = tan^{-1}\big(f(0)\big) + \frac{f'(0)}{1+f(0)^2}\varepsilon$.

e) Reemplace el resultado obtenido en (d) en la ecuación para la fase de (b) y llegue al mapa del círculo:

$$\phi_{n+1} = \phi_n + \eta + \varepsilon \cos(\phi_n)$$

   Con $\eta = w_0 T = 2\pi T/T_0$.

[Análisis del mapa]

f) Busque órbitas periódicas de período 1 en este mapa ($\phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi$). Analice para qué relación debe existir entre T/T_0 y ε para que esta solución exista.

g) Dé una relación entre los parámetros del problema para que ocurra una bifurcación de duplicación de período.

h) Busque órbitas de período 2, despreciando términos cuadráticos en ε en la composición del mapa consigo mismo.
[Ayuda]: para cumplir esto, utilice la aproximación: $\cos(a + x) = \cos(a)$
Como en (f), busque la cota que debe cumplir T/T_0 para que esta solución exista.
Nota: esta aproximación es una sobresimplificación respecto a considerar la composición del mapa a orden 2 completo. Donde sea necesario, acote los cosenos por su máximo valor.

i) En un diagrama (T/T_0, ε) grafique las condiciones halladas en (f) y (h). ¿Qué significado físico tienen estas soluciones?