Ejercicio para entrega Dinámica No Lineal / Mecánica Clásica Avanzada
Cátedra Mindlin - 1er cuatrimestre 2020
Tema: Mapas (recuperatorio)

Estudiaremos un problema físico del cual puede obtenerse directamente un mapa. El problema es una bola rebotando por la acción de la gravedad en una mesa maciza que vibra sinusoidalmente. Para este sistema, considerando el rebote instantáneo podemos escribir:

$$V(t_j) - W(t_j) = -\alpha(U(t_j) - W(t_j))$$

con *U* la velocidad con la que la pelota llega a la mesa, *V* la velocidad con la que sale y *W* la velocidad de la mesa; $0 < \alpha \leq 1$ es un coeficiente de restitución y t_j el tiempo del j-ésimo rebote.

[Construcción del mapa]

a) Usando consideraciones cinemáticas y considerando que la velocidad de la mesa no se ve afectada por el impacto, muestre que:

$$t_{j+1} - t_j = \frac{2V(t_j)}{g}; \quad U(t_{j+1}) = -V(t_j)$$

b) Con la información obtenida y usando la ecuación original, escriba ecuaciones para t_{j+1} y V_{j+1} en función de las variables de estado del problema: t_j, V_j y W_j.

c) Considerando que el desplazamiento de la mesa está dado por $X(t) = -\beta sen(wt)$, escriba *W* y reescriba las ecuaciones obtenidas en (b) en su forma adimensional, en términos de el tiempo y velocidades adimensionales $\phi = wt$, $v = \frac{2wV}{g}$. Finalmente, muestre que llega al siguiente mapa bidimensional y diga quién es γ:

$$f: \phi_{j+1} = \phi_j + v_j \quad ; \quad v_{j+1} = \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j)$$

d) Muestre que el mapa es invariante ante la transformación $\phi_j \to \phi_j + 2n\pi$ y, por lo tanto, 2π-periódico en ϕ.

[Análisis del mapa]

e) Calcule el Jacobiano del mapa 2D (f) y su determinante. Si el determinante del Jacobiano es la unidad, la transformación dada por el mapa *preserva el área*. Diga para qué valor de los parámetros ocurre esto.

f) Encuentre la condición que debe cumplir v_j para que $|v_{j+1}| < |v_j|$. ¿Para qué valores de α es esto posible? ¿Qué significa esto para las órbitas que puedan ocurrir en el mapa?

g) Encuentre puntos fijos en el mapa, usando explícitamente la condición de periodicidad en ϕ. Es decir: $f(\phi*, v*) = (\phi* + 2n\pi, v*)$.

h) La estabilidad de los puntos fijos está dada por los autovalores del Jacobiano obtenido en (e), que para α fijo dependen del parámetro γ. Escriba los autovalores en término de la traza y el determinante del Jacobiano. Existe un valor mínimo para γ tal que los puntos fijos existan. Encuentre ese valor y diga qué bifurcación ocurre en ese punto.
[Ayuda]: use la relación $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.

i) A medida que aumenta γ, existe un valor crítico, γ_c, a partir del cual uno de los puntos fijos pierde estabilidad. ¿Qué tipo de bifurcación espera que ocurra para ese valor de γ_c? ¿Cómo la estudiaría?
[Opcional]: encuentre explícitamente la expresión para γ_c.
[Nota]: No se pide explícitamente estudiar la bifurcación, sino delinear el procedimiento que le permitiría estudiar lo que pasa al llegar a γ_c . Como opcional, puede estudiar el comportamiento numéricamente.