Guía 1 Dinámica no Lineal - Flujos unidmensionales
Cátedra G.Mindlin

1er Cuatrimestre 2021

Nota: los problemas que figuran con (*) son obligatorios. El resto son optativos, pero recomendados.

1. Analice las siguientes ecuaciones diferenciales de primer orden gráficamente. Primero grafique el campo vector. Luego encuentre todos los puntos fijos, clasifique su estabilidad, y realice gráficos de la trayectoria ($x(t)$) para distintas condiciones iniciales. Grafique alguna de estas trayectorias en el espacio de fases (i.e. el retrato de fases). Luego intente algunos minutos obtener la solución analítica para $x(t)$; si no resulta, no se amargue porque en varios casos es imposible resolver la ecuación en forma cerrada. Compruebe que las soluciones posibles para estos sistemas son de forma similar: o se aproximan a un valor o se alejan del mismo.

   (a) $\dot{x} = ax$ (sistema lineal en 1D, note el conjunto de soluciones acotada que presenta este sistema)

   (b) (*) $\dot{x} = 4x^2 - 16$

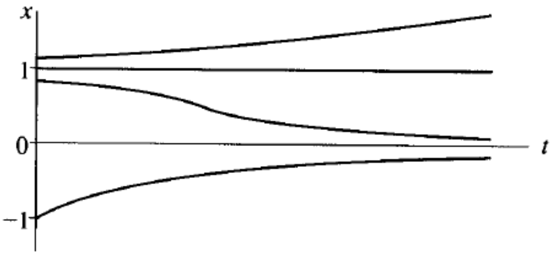
   (c) (*) $\dot{x} = x - x^3$

   (d) $\dot{x} = 1 + 0.5 \cos x$

   (e) (*) $\dot{x} = e^x - \cos x$ (truco: grafique e^x y $\cos x$ en el mismo gráfico y busque las intersecciones. No se pueden encontrar los puntos fijos analíticamente, pero si puede explicar el comportamiento cualitativo)

   (f) $\dot{x} = 1 - 2\cos x$

2. Encuentre una ecuación $\dot{x} = f(x)$ cuya solución sea consistente con el gráfico siguiente:



Problema 2. Note que cada curva corresponde a la evolución temporal de una condición inicial distinta.

3. (*) El crecimiento de los tumores cancerígenos puede ser modelado mediante la ley de Gompertz $\dot{N} = -aN\ln(bN)$, donde $N(t)$ es proporcional al número de células en el tumor y $a, b > 0$ son parámetros.

   (a) Interprete a y b biológicamente.

   (b) Dibuje el campo vector y grafique $N(t)$ para varias condiciones iniciales.

4. Use estabilidad lineal para clasificar los puntos fijos de los siguientes sistemas. Si la estabilidad lineal falla porque $f'(x^*) = 0$, use un argumento gráfico para demostrar estabilidad.

(a) $\dot{x} = x(1-x)$

(b) $\dot{x} = x(1-x)(2-x)$

(c) (*) $\dot{x} = \tan x$

(d) (*) $\dot{x} = 1 - e^{-x^2}$

(e) $\dot{x} = ax - x^3$, donde a puede ser positivo, nulo, o negativo. Discuta todos los casos.

(f) $\dot{x} = x^2(6-x)$

(g) (*) $\dot{x} = \ln x$

5. (*) Usando estabilidad lineal, clasifique todos los puntos fijos del modelo de Gompertz de crecimiento de tumores visto anteriormente.

6. (*) Considere la ecuación $\dot{x} = rx + x^3$, para $r > 0$ fijo. Muestre que $x(t) \to \infty$, comenzando con cualquier condición inicial $x_0 \neq 0$

7. (*) **Flujo en el círculo. Luciérnagas.** Las luciérnagas proporcionan uno de los ejemplos más espectaculares de sincronización en la naturaleza. En algunas partes del sudeste asiático, miles de luciérnagas machos se reúnen en los árboles por la noche y se encienden y apagan al unísono. Considere para este fenómeno el modelo

$$\begin{aligned} \dot{\Theta} &= \Omega \\ \dot{\theta} &= \omega + Af(\Theta - \theta) \end{aligned}$$

donde Θ es la fase de un estímulo externo, θ es la fase de destello de una luciérnaga individual ($\theta = 0$ representa el momento del destello) y f modela la respuesta al estímulo. En este caso, modelamos esta respuesta usando una onda triangular:

$$f(\phi) = \begin{cases} \phi, & -\pi/2 \leq \phi \leq \pi/2 \\ \pi - \phi, & \pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2 \end{cases} \tag{1}$$

en el intervalo $-\pi/2 \leq \phi \leq 3\pi/2$, y extienda periódicamente f fuera de este intervalo. (Ver Strogatz sección 4.5)

(a) Grafique $f(\phi)$.

(b) Encuentre el rango de dinámica acotada, es decir, el rango de parámetros para el cuál la diferencia de fase entre el estímulo y el destello no crece indefinidamente.

(c) Asumiendo que las luciérnagas están lockeadas al estímulo, encuentre una fórmula para la diferencia de fase ϕ^*.

(d) En el caso en que las luciérnagas no están lockeadas al estímulo, calcule el tiempo que tarda la diferencia de fase en cambiar en 2π:

$$T_{drift} = \int dt = \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\phi} d\phi = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\dot{\phi}(\phi)}$$